Конспект лекції № 4
Тема № 4. ДИНАМІЧНІ МІЖГАЛУЗЕВІ МОДЕЛІ

Міжпредметні зв’язки: Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Дослідження операцій”, „Економіко-математичні методи та моделі” та „Оптимізаційні методи та моделі”.

Мета лекції: дослідити основну відмінність статичних та динамічних галузевих моделей; розкрити суть та методи саме динамічних моделей міжгалузевого балансу та продемонструвати розв’язок балансових задач за допомогою цих моделей..

Ключові поняття та терміни

- Динамічні міжгалузеві моделі
- Динамічна модель В. Леонтьєва
- Відкрита динамічна модель
- Замкнена динамічна модель
- Дискретний аналіз моделі

План лекції

4.1. Відображення динаміки в моделях міжгалузевого балансу
4.2. Динамічна модель В. Леонтьєва
4.2.1. Неперервний аналіз моделі
4.2.2. Дискретний аналіз моделі
4.3. Синтез динамічних багатогалузевих моделей Леонтьєва
4.4. Практична реалізація динамічних міжгалузевих моделей
4.4.1 Приклад розв’язку задачі міжгалузевого балансу з використанням дискретного аналізу динамічної галузевої моделі Леонтьєва
4.4.2 Розв’язок замкненої моделі валової продукції
4.4.3. Розв'язок відкритої моделі валової продукції

Інформаційні джерела:

Основна та допоміжна література:

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц./ В. В. Вітлінський, Г. І. Великоіваненко. – К.: КНЕУ, 2005. – 306 с.
2. Вовк В.М. Оптимізаційні моделі економіки : навч. посібник / В.М. Вовк, Л.М. Зомчак. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 318 с.
3. Дацко М. В. Дослідження операцій в економіці: навч. посіб. / М. В. Дацко, М. М. Карбовник. – Л. : ПАІС, 2009. – 288 с.
4. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ “Економічна думка”, 2008. – 704 с.

Навчальне обладнання: ТЗН, презентація тощо: ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

4.1. ВІДОБРАЖЕННЯ ДИНАМІКИ В МОДЕЛЯХ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

У процесі вдосконалення і ускладнення моделі «витрати-випуск» був створений динамічний варіант системи, що враховував технічний прогрес, перебудову промисловості, зміни цінових пропорцій. Модель була переведена на гнучкі коефіцієнти. Ця робота виявилася досить успішною ще й тому, що паралельно з науковим пошуком удосконалювалося комп'ютерне забезпечення.

Статичні моделі спрощують взаємозв'язки між періодами планування. Характеристики структури виробництва для різних років визначаються розрахунками окремих матричних моделей міжгалузевого балансу для кожного року окремо. Але таке спрощене відображення реального динамічного характеру виробництва не дозволяє аналізувати розподіл, використання і виробничу ефективність. В цих моделях капіталовкладення винесені із сфери виробництва в сферу кінцевого споживання разом з предметами споживання і невиробничими витратами.

Недоліки такого спрощення дозволяють усунути динамічні моделі міжгалузевого балансу, які покликані відбити не стан, а процес розвитку економіки, встановити безпосередній взаємозв'язок між попередніми та наступними етапами розвитку і тим самим наблизити аналіз на основі економіко-математичної моделі до реальних умов розвитку економічної системи.

Розглянемо динамічну модель, як розвиток статичної моделі міжгалузевого балансу. Залежність між величиною капіталовкладень і приростом продукції, як наслідку цих капітальних вкладень, є основною динамічної моделі. В цьому разі виробничі капіталовкладення виділяються з складу кінцевої продукції, і аналізується їх структура і вплив на зростання обсягів народногосподарського виробництва. Таким чином динамічна модель міжгалузевого балансу дає можливість найбільш послідовно використовувати принципи перспективного планування, тобто розрахувати планові показники за плановими обсягами і структурами невиробничого споживання, капітовкладеннями в невиробничу сферу, частиною виробничих капіталовкладень, не пов'язаних з приростом продукції в даному періоді; тобто так зване кінцеве споживання капітальних вкладень. Це означає, що планування виробничої програми і капіталовкладень здійснюється одночасно і взаємопов'язано.

4.2. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ В. ЛЕОНТЬЄВА

4.2.1. НЕПЕРЕРВНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ

В основі багатопродуктових балансових моделей «витрати – випуск» лежить відома динамічна модель Леонтьєва. Існує неперервна та дискретна форми цієї моделі. При чому, для теоретичного аналізу використовується перша постановка, а за базу для прикладних задач береться друга. Спершу розглянемо неперервну постановку.

Принципова схема перших двох розділів динамічного міжгалузевого балансу подана в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Матричне представлення перших двох розділів динамічного міжгалузевого балансу

Виробничі галузі	Галузі споживання									
	Міжгалузеві потоки поточних витрат				Міжгалузеві потоки капіталовкладень				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	n	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\Delta\Phi_{11}$	$\Delta\Phi_{12}$	…	$\Delta\Phi_{1n}$	$\bar{Y}_1$	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\Delta\Phi_{21}$	$\Delta\Phi_{22}$	…	$\Delta\Phi_{2n}$	$\bar{Y}_2$	X_2
…			…				…		…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\Delta\Phi_{n1}$	$\Delta\Phi_{n2}$	…	$\Delta\Phi_{nn}$	$\bar{Y}_n$	X_n

Модель містить дві матриці міжгалузевих потоків. Матриця поточних виробничих витрат з елементами x_{ij} збігається з відповідною матрицею статичного балансу. Елементи другої матриці $\Delta\Phi_{ij}$ показують, яка кількість продукції $i -$ ї галузі направлена в поточному періоді в $j -$ у галузь в якості виробничих капітальних вкладень в її основні фонди. Матеріально це виражається приростом в споживаючих галузях виробничого обладнання, споруд, виробничих площ, транспортних засобів та ін.

У статичному балансі потоки капіталовкладень не диференціюються за галузями-споживачам і відображаються загальною величиною в складі кінцевої продукції Y_i кожної $i -$ ї галузі. У динамічній схемі кінцевий продукт $\bar{Y}_i$ включає продукцію $i -$ ї галузі, що йде в особисте і суспільне споживання, накопичення невиробничої сфери, приріст оборотних фондів, незавершене будівництво, на експорт. Таким чином, сума потоків капіталовкладень і кінцевого продукту динамічної моделі дорівнює кінцевої продукції статичного балансу:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + \bar{Y}_i = Y_i \,, i = \overline{1,n} \,;$$

тому статичне рівняння розподілу продукції виду $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i$, $i = \overline{1,n}$. в динамічному балансі перетворюється в наступне:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + \bar{Y}_i \,, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.1}$$

Міжгалузеві потоки поточних витрат можна виразити, як в статичній моделі, через валову продукцію галузей за допомогою коефіцієнтів прямих матеріальних витрат:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j \,, \;\; i,j = \overline{1,n} \,.$$

На відміну від потоків поточних витрат, міжгалузеві потоки капітальних вкладень пов'язані не з усією величиною випуску продукції, а обумовлюють приріст продукції; причому, в даній моделі передбачається, що приріст продукції поточного періоду обумовлений вкладеннями, виробленими в

цьому ж періоді. Якщо поточний період позначити через t , то приріст продукції ΔX_j дорівнює 5
різниці абсолютних рівнів виробництва в період t і в попередній (t-1) – й період:

$$\Delta X_j = X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)}, j = \overline{1,n}.$$

Вважаючи, що приріст продукції пропорційний приросту виробничих фондів, можна записати:

$$\Delta\Phi_{ij} = \varphi_{ij} \cdot \Delta X_j, \qquad i,j = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

Де φ_{ij} – коефіцієнт пропорційності. Так як:

$$\varphi_{ij} = \frac{\Delta\Phi_{ij}}{\Delta X_j}, \qquad i,j = \overline{1,n},$$

то економічний сенс цих коефіцієнтів полягає в тому, що вони показують, яка кількість продукції i – ї галузі має бути вкладена в j – у галузь для збільшення виробничої потужності в j –ої галузі на одиницю продукції.

Передбачається, що виробничі потужності використовуються повністю і приріст продукції дорівнює приросту потужності. Коефіцієнти φ_{ij} також називаються коефіцієнтами вкладень або коефіцієнтами приросту фондомісткості.

За допомогою коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і коефіцієнтів вкладень φ_{ij} систему рівнянь (4.1) можна представити в наступному вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \cdot \Delta X_j + \bar{Y}_i, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.3}$$

Система (4.3) являє собою систему лінійних різницевих рівнянь першого порядку. Її можна привести до звичайної системи лінійних рівнянь, якщо врахувати, що всі обсяги валової і кінцевої продукції відносяться до деякого періоду t, а приріст валової продукції визначено в порівняно з (t -1) – м періодом:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j^{(t)} + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \cdot \left(X_j^{(t)} - X_j^{(t-1)}\right) + \bar{Y}_i^{(t)}, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.4}$$

Звідси, після відповідних перетворень, можна записати наступне співвідношення:

$$X_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} + \varphi_{ij}\right) \cdot X_j^{(t)} - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \cdot X_j^{(t-1)} + \bar{Y}_i^{(t)}, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.5}$$

Нехай нам відомі рівні валової продукції всіх галузей в попередньому періоді ($X_j^{(t-1)}$) і кінцевий продукт галузей в t-му періоді. Тоді очевидно, що співвідношення (4.5) являють собою систему n лінійних рівнянь з n невідомими рівнями виробництва t-го періоду. Таким чином, розв'язок динамічної системи лінійних рівнянь дозволяє визначити випуск продукції в наступному періоді залежно від рівня, досягнутого в попередньому періоді. Зв'язок між періодами встановлюється через коефіцієнти вкладень φ_{ij}, що характеризують фондомісткість одиниці приросту продукції.

Дану матричну модель міжгалузевого балансу (4.5) часто називають напівдинамічною моделлю в скінченно-різницевій формі.

4.2.2. ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ

Переходячи від дискретного аналізу (описаний в пункті 4.2.1) до неперервного, замість співвідношення (4.1) будемо мати:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \frac{d\Phi_{ij}(t)}{dt} + \bar{Y}_i\,, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.6}$$

А вираз (4.2) тоді виглядатиме:

$$\frac{d\Phi_{ij}(t)}{dt} = \varphi_{ij} \cdot \frac{d\mathrm{X}_j(t)}{dt}\,, \qquad i,j = \overline{1,n}\,, \tag{4.7}$$

Беручи до уваги (4.6) та (4.7), остаточно отримаємо наступну систему співвідношень для випадку безперервних змін:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \cdot \frac{d\mathrm{X}_j(t)}{dt} + \bar{Y}_i\,, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.8}$$

Ця модель називається класичною динамічною моделлю В. Леонтьева. Співвідношення (4.8) являють собою систему n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з постійним і коефіцієнтами. Для її вирішення, крім матриць коефіцієнтів прямих матеріальних поточних витрат і до коефіцієнтів капітальних витрат (вкладень) необхідно знати рівні валового випуску в початковий момент часу $t = 0$ і закон зміни величини кінцевого продукту, тобто вид функцій $\bar{Y}_i(t)$. На основі цих даних шляхом вирішення отриманої задачі для системи диференціальних рівнянь (4.8) можна знайти рівні валового випуску теоретично для будь-якого моменту часу. Практично ж більш-менш достовірний опис валових і кінцевих випусків, як функцій від часу може бути отримано лише для відносно невеликих проміжків часу.

У динамічної моделі особливу роль відіграють коефіцієнти приросту фондомісткості φ_{ij}. Вони утворюють квадратну матрицю n-го порядку:

$$\varphi_{ij} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & 2n \\ . & . & . & . \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

кожен стовпець якої характеризує для відповідної j –ої галузі величину і структуру фондів, необхідних для збільшення на одиницю її виробничої потужності (випуску продукції). Матриця коефіцієнтів приросту фондомісткості дає значний матеріал для економічного аналізу і планування капітальних вкладень.

Коефіцієнти приросту фондомісткості φ_{ij} певним чином пов'язані з валовими коефіцієнтами прямий фондомісткості продукції f_{kj}, де

$$f_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{X_j}\,.$$

В даному випадку значення Φ_{kj} відображає об'єм виробничих фондів k –ої групи ($k = \overline{1,m}$), що задіяні в j –ії галузі.

Коефіцієнти f_{kj} показують, скільки всього фондів даного виду припадає на одиницю валового випуску продукції, а коефіцієнти φ_{ij} відображають приріст фондів на одиницю приросту продукції. Якби технологічний прогрес в галузях виробництва був відсутній, то на одиницю приросту продукції було б стільки ж нових фондів, скільки їх вже зайнято на одиницю продукції, що випускається, тобто коефіцієнти приросту фондомісткості і валової прямої фондомісткості були б рівні між собою. Проте, так як нові капітальні вкладення виробляються на новому більш високому технічному рівні порівняно з об'ємом і структурою діючих фондів, то на практиці коефіцієнти приросту фондомісткості і коефіцієнти прямої фондомісткості розрізняються за величною. Однак між цими двома групами7 коефіцієнтів існує цілком певний зв'язок, і це використовується при розробці динамічних моделей, особливо, в зв'язку з тим, що достовірні дані про фондомісткості продукції отримати легше, ніж безпосередньо розрахувати коефіцієнти вкладень.

Крім коефіцієнтів прямої фондомісткості коефіцієнти вкладень пов'язані з іншими показниками, наприклад з відповідними коефіцієнтами поточних витрат, які відображають знос основних фондів і рівними амортизації, що припадає на одиницю продукції.

У розглянутій динамічній моделі міжгалузевого балансу передбачається, що приріст продукції поточного періоду обумовлений капіталовкладеннями, зробленими в цьому ж періоді. Для порівняно коротких періодів це припущення може бути нереальним, оскільки існують відомі, іноді досить значні відставання в часі (так звані часові лаги) між вкладенням коштів у виробничі фонди і приростом випуску продукції. Моделі, які так чи інакше враховують лаг капітальних вкладень, утворюють особливу групу динамічних моделей міжгалузевого балансу.

4.3. Синтез динамічних багатогалузевих моделей Леонтьєва

Даний пункт дещо узагальнює попередні два пункти лекції (4.2.1) та (4.2.2).

Для визначення наступних моделей введемо наступні позначення. Нехай:

$x(t) = \big(x_i(t)\big) -$ вектор-функція валового продукту;

$y(t) = \big(y_i(t)\big) -$ вектор-функція кінцевого продукту;

$z(t) = \big(z_i(t)\big) -$ вектор-функція проміжного продукту (споживання);

$k(t) = \big(k_i(t)\big) -$ вектор-функція інвестицій;

$c(t) = \big(c_i(t)\big) -$ вектор-функція продукції невиробничого споживання,

де $i = \overline{1,n}$; $n -$кількість галузей виробництва.

Будемо розглядати моделі Леонтьєва, в яких валовий продукт розподіляється на дві частини:

$$x(t) = z(t) + y(t)\,. \tag{4.3.1}$$

Кінцевий продукт також розподіляється на дві частини:

$$y(t) = k(t) + c(t)\,. \tag{4.3.2}$$

Безперервне підтримання балансів (4.3.1) і (4.3.2) є основною проблемою динамічної рівноваги економіки в цілому при різних процесах невиробничого споживання.

Розгляду підлягають замкнуті і відкриті моделі валової і кінцевої продукції.

Замкнені моделі відображають економіку при нульовому значенні невиробничого споживання $c(t)$. В цьому випадку весь вироблений продукт використовується в якості інвестицій. Відбувається максимальне нарощування виробничого капіталу і випуску продукції.

Відкриті моделі відображають економіку при різних траєкторіях невиробничого споживання $c(t)$. Основний інтерес представляють випадки гранично можливих процесів невиробничого споживання.

Дослідження замкнутих і відкритих моделей дає можливість виявити весь діапазон різноманітних процесів $c(t)$.

Перейдемо до синтезу відкритих динамічних моделей.

Підставивши вираз кінцевого продукту (4.3.2) в формулу (4.3.1), отримуємо модель економіки з урахуванням всіх введених вище показників:

$$x(t) = z(t) + \ k(t) + c(t)\,. \tag{4.3.3}$$

Для складання моделі В. Леонтьєва з балансової рівності (4.3.3) необхідно виключити ендогенні (внутрішні) процеси $z(t)$ і $k(t)$.Тому потрібно ввести залежності $z(t)$ і $k(t)$ від $x(t)$.

Приймається випадок постійних коефіцієнтів прямих матеріальних витрат на виробництво і пропорційна залежність проміжного від валового продукту. Тоді вектор-стовпець проміжної продукції виражається твором квадратної матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A на вектор-стовпець валового продукту:

$$z(t) = Ax(t)\,, \tag{4.3.4}$$

де $A = (a_{ij})-$ квадратна матриця n-го порядку коефіцієнтів a_{ij} прямих матеріальних витрат. Коефіцієнти a_{ij} відрізняються тим, що в динамічних моделях вони включають не тільки прямі матеріальні витрати, але і відшкодування вибуття і капітальний ремонт основних фондів. Тому елементи головної діагоналі не рівні нулю.

Залежність вектора капіталовкладень від вектора валового продукту відображається у формі:

$$k(t) = B\,\frac{dx(t)}{d(t)}\,, \tag{4.3.5}$$

де $B = (b_{ij}) -$ квадратна матриця n-го порядку коефіцієнтів приросту капіталомісткості виробництва продукції.

Відкрита динамічна модель валової продукції у матрично-векторній формі виводиться підстановкою виразів із рівнянь (4.3.4) і (4.3.5) в формулу (4.3.3). В результаті отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$B\,\frac{dx(t)}{d(t)} + (A - E)x(t) + c(t) = 0\,, \tag{4.3.6}$$

де $E -$ одинична діагональна матриця n-го порядку.

Замкнена динамічна модель валового продукт являється частковим випадком формули (4.3.6), коли $c(t) = 0$.

Відкриту і замкнену моделі кінцевого продукту у вигляді вектора функцій $y(t)$ можна вивести на підставі обчислених процесів $x(t)$. І тому в формулу (4.3.1) підставимо вираз $z(t)$ з формули (4.3.4) і вирішимо виведене рівняння відносно $y(t)$:

$$x(t) = z(t) + y(t), \qquad x(t) = Ax(t) + y(t), \qquad y(t) = (A - E)x(t) \tag{4.3.7}$$

Якщо $x(t)$ вектор-функція валової продукції відкритої динамічної моделі, то і $y(t)$ - вектор-функція кінцевої продукції відкритої динамічної моделі. Якщо ж $x(t)$ - вектор-функція валової продукції замкненої динамічної моделі, то і $y(t)$ - вектор-функція кінцевої продукції замкненої динамічної моделі.

Слід зазначити такі найважливіші особливості динамічних моделей Леонтьєва:

- Коефіцієнти прямих матеріальних витрат a_{ij} і приросту капіталомісткості b_{ij} вважаються постійними, однак в довгострокових періодах вони схильні до змін;
- Амортизація виробничого капіталу в моделі відшкодовується не відкрито, тому в моделях можливі тільки неспадні процеси випуску продукції;
- Приріст виробництва продукції слідує миттєво за інвестиціями. Однак реально існує деяке запізнювання випуску щодо інвестиційного процесу;
- Економічні величини відображаються моментними показниками, вони не узгоджуються з інтервальними показниками статичних моделей В. Леонтьєва, які характеризують економіку не в окремі моменти часу, а за короткостроковий відрізок (зазвичай за один рік);
- В моделях В. Леонтьєва не враховується науково-технічний прогрес.

4.4.1 Приклад розв'язку задачі міжгалузевого балансу з використанням дискретного аналізу динамічної галузевої моделі Леонтьєва

Нехай економіка деякої країни представлена 7-ма галузями: сільське господарство, добувна промисловість, будівництво, переробна промисловість, енергетика, машинобудівна та харчова промисловості. За початковий період часу обрано 2013 рік. Відомо, що валовий випуск кожної галузі у 2013 році становив (дані подано в умовних одиницях):

$$X^{2013} = \begin{pmatrix} 40\ 000 \\ 15\ 000 \\ 7\ 000 \\ 11\ 500 \\ 8\ 550 \\ 4\ 900 \\ 19\ 500 \end{pmatrix};$$

Також відома матриця прямих матеріальних витрат (A) та матриця коефіцієнтів вкладень (φ):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}0562 & 0{,}1867 & 0{,}5263 & 0{,}2366 & 0{,}5232 & 0{,}7180 & 0{,}1478 \\ 0{,}0291 & 0{,}0735 & 0{,}1529 & 0{,}0704 & 0{,}1503 & 0{,}1816 & 0{,}0602 \\ 0{,}0184 & 0{,}0297 & 0{,}0751 & 0{,}0543 & 0{,}0733 & 0{,}1206 & 0{,}0351 \\ 0{,}0274 & 0{,}0525 & 0{,}1397 & 0{,}1077 & 0{,}1346 & 0{,}2210 & 0{,}0427 \\ 0{,}0104 & 0{,}0385 & 0{,}0794 & 0{,}0534 & 0{,}0525 & 0{,}1527 & 0{,}0327 \\ 0{,}0075 & 0{,}0309 & 0{,}0556 & 0{,}0374 & 0{,}0484 & 0{,}0700 & 0{,}0185 \\ 0{,}0375 & 0{,}0673 & 0{,}1787 & 0{,}1679 & 0{,}2060 & 0{,}3880 & 0{,}0567 \end{pmatrix};$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0{,}0603 & 0{,}1903 & 0{,}5589 & 0{,}7145 & 0{,}8630 & 0{,}9827 & 0{,}8320 \\ 0{,}0331 & 0{,}0430 & 0{,}2133 & 0{,}3890 & 0{,}7580 & 0{,}4236 & 0{,}2427 \\ 0{,}0079 & 0{,}0210 & 0{,}0778 & 0{,}0575 & 0{,}1290 & 0{,}1209 & 0{,}0713 \\ 0{,}0083 & 0{,}0347 & 0{,}0867 & 0{,}0990 & 0{,}2220 & 0{,}1745 & 0{,}1580 \\ 0{,}0222 & 0{,}0405 & 0{,}1933 & 0{,}1630 & 0{,}2410 & 0{,}1809 & 0{,}2427 \\ 0{,}0095 & 0{,}0183 & 0{,}0639 & 0{,}0805 & 0{,}1610 & 0{,}0945 & 0{,}1060 \\ 0{,}0461 & 0{,}1192 & 0{,}2800 & 0{,}2950 & 0{,}4090 & 0{,}6136 & 0{,}3047 \end{pmatrix}.$$

Потрібно визначити валовий продукт за 2014 та 2015 роки, якщо є відома величина кінцевого продукту за ці ж роки:

$$\bar{Y}^{2014} = \begin{pmatrix} 11\ 000 \\ 4\ 400 \\ 2\ 090 \\ 3\ 300 \\ 2\ 750 \\ 1\ 375 \\ 5\ 500 \end{pmatrix}; \qquad \bar{Y}^{2015} = \begin{pmatrix} 12\ 200 \\ 3\ 320 \\ 2\ 075 \\ 3\ 770 \\ 3\ 800 \\ 1\ 130 \\ 6\ 000 \end{pmatrix}.$$

Отож, щоб визначити валовий випуск продукції кожної галузі за 2015 рік, необхідно спочатку обчислити цей же показник за попередній рік. Щоб це зробити, потрібно скористатися співвідношенням (4.5), завдяки якому ми отримаємо систему з 7-ми лінійних рівнянь із 7-ма невідомими рівнями виробництва t-го періоду (тобто, 2014 року) з постійними коефіцієнтами a_{ij} та

φ_{ij}:

$$\begin{cases} X_1^{2014} = (a_{11} + \varphi_{11}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{17} + \varphi_{17}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{11} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{17} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_1^{2014} \\ X_2^{2014} = (a_{21} + \varphi_{21}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{27} + \varphi_{27}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{21} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{27} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_2^{2014} \\ X_3^{2014} = (a_{31} + \varphi_{31}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{37} + \varphi_{37}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{31} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{37} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_3^{2014} \\ X_4^{2014} = (a_{41} + \varphi_{41}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{47} + \varphi_{47}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{41} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{47} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_4^{2014} \\ X_5^{2014} = (a_{51} + \varphi_{51}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{57} + \varphi_{57}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{51} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{57} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_5^{2014} \\ X_6^{2014} = (a_{61} + \varphi_{61}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{67} + \varphi_{67}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{61} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{67} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_6^{2014} \\ X_7^{2014} = (a_{71} + \varphi_{71}) \cdot X_1^{2014} + \dots + (a_{77} + \varphi_{77}) \cdot X_7^{2014} - (\varphi_{71} \cdot X_1^{2013} + \dots + \varphi_{77} \cdot X_7^{2013}) + \bar{Y}_7^{2014} \end{cases}.$$

(4.4.1.1)

Тепер, підставивши відомі величини коефіцієнтів прямих витрат та коефіцієнтів вкладень, а також валові випуски продукції за 2013 р. та кінцевий продукт за 2014 р. для кожної із 7-и галузей, отримаємо:

$$\begin{cases} X_1^{2014} = 0{,}1165 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}9798 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0603 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}8320 \cdot 19\,500) + 11\,000 \\ X_2^{2014} = 0{,}0622 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}3028 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0331 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}2427 \cdot 19\,500) + 4\,400 \\ X_3^{2014} = 0{,}0262 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}1064 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0079 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}0713 \cdot 19\,500) + 2\,090 \\ X_4^{2014} = 0{,}0356 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}2007 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0083 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}1580 \cdot 19\,500) + 3\,300 \\ X_5^{2014} = 0{,}0326 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}2753 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0222 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}2427 \cdot 19\,500) + 2\,750 \\ X_6^{2014} = 0{,}0169 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}1245 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0095 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}1060 \cdot 19\,500) + 1\,375 \\ X_7^{2014} = 0{,}0836 \cdot X_1^{2014} + \dots + 0{,}3614 \cdot X_7^{2014} - (0{,}0461 \cdot 40\,000 + \dots + 0{,}3047 \cdot 19\,500) + 5\,500 \end{cases}.$$

Розв'яжемо дану систему рівнянь за допомогою середовища MS Excel. Для цього, спочатку, впишемо в окремі комірки матрицю коефіцієнтів при невідомих змінних X_j^{2014}(табл.4.1) та вектор вільних членів системи рівнянь (табл. 4.2):

Таблиця 4.1

Матриця коефіцієнтів при невідомих змінних X_j^{2014}

Матриця коефіцієнтів						
0,8835	-0,3771	-1,0852	-0,9511	-1,3862	-1,7007	-0,9798
-0,0622	0,8835	-0,3662	-0,4594	-0,9083	-0,6053	-0,3028
-0,0262	-0,0507	0,8471	-0,1118	-0,2023	-0,2415	-0,1064
-0,0356	-0,0871	-0,2264	0,7933	-0,3566	-0,3956	-0,2007
-0,0326	-0,0790	-0,2728	-0,2164	0,7065	-0,3336	-0,2753
-0,0169	-0,0492	-0,1195	-0,1179	-0,2094	0,8355	-0,1245
-0,0836	-0,1864	-0,4587	-0,4629	-0,6150	-1,0016	0,6386

Таблиця 4.2

Вектор вільних членів системи рівнянь (4.4.1.1)

Вектор вільних членів
34 812,6525
16 825,8848
2 831,7657
5 130,2061
9 652,3379
4 558,4616
15 930,1015

Далі необхідно знайти обернену матрицю до матриці коефіцієнтів. Для цього застосуємо функцію *MINVERSE* в середовищі *MS Excel*. Отримали наступну матрицю (табл. 4.3), яка є оберненою до матриці коефіцієнтів при невідомих змінних системи рівнянь (4.4.3.1):

Таблиця 4.3

Обернена матриця коефіцієнтів

Обернена матриця						
0,7320	-0,5429	-1,5006	-1,4303	-2,3179	-2,5298	-1,3264
-0,1041	0,7224	-0,7219	-0,5613	-0,6970	-1,2243	-0,6531
-0,0264	-0,0741	0,8049	-0,2109	-0,2990	-0,3366	-0,2024
-0,0539	-0,1256	-0,3682	0,6572	-0,4994	-0,5871	-0,3268
-0,0587	-0,1398	-0,3457	-0,3526	0,4026	-0,6634	-0,2806
-0,0323	-0,0686	-0,2093	-0,1857	-0,2662	0,6252	-0,1682
-0,0998	-0,2467	-0,7571	-0,6570	-1,1135	-1,0142	0,2854

Тепер, щоб знайти валовий випуск продукції за 2014 рік, тобто обчислити систему рівнянь (4.3.1), необхідно помножити цю обернену матрицю коефіцієнтів на вектор вільних членів. Для чого, можна застосувати функцію *MMULT* в середовищі *MS Excel*.

Отримали вектор стовпець (табл.4.4) розмірністю 7х1, елементи якого і будуть шуканими величинами, тобто обсяг валового випуску продукції кожної галузі на 2014 рік:

Таблиця 4.4

Розрахований обсяг валової продукції на 2014 рік

Галузь	**Валовий випуск за 2014 рік**
Сільське господарство	50 273,36
Добувна промисловість	19 106,48
Будівництво	8 614,03
Переробна промисловість	14 361,37
Енергетика	10 792,12
Машинобудування	6 221,69
Харчова промисловість	23 962,92

Так само обчислюється і валовий обсяг продукції на 2015 рік, лише тепер враховується вже обчислений валовий випуск за 2014 рік, а не за 2013, як в попередньому етапі.

Тобто система рівнянь (4.1.1) набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} X_1^{2015} = (a_{11}+\varphi_{11})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{17}+\varphi_{17})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{11}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{17}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_1^{2015} \\ X_2^{2015} = (a_{21}+\varphi_{21})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{27}+\varphi_{27})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{21}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{27}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_2^{2015} \\ X_3^{2015} = (a_{31}+\varphi_{31})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{37}+\varphi_{37})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{31}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{37}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_3^{2015} \\ X_4^{2015} = (a_{41}+\varphi_{41})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{47}+\varphi_{47})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{41}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{47}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_4^{2015} \\ X_5^{2015} = (a_{51}+\varphi_{51})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{57}+\varphi_{57})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{51}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{57}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_5^{2015} \\ X_6^{2015} = (a_{61}+\varphi_{61})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{67}+\varphi_{67})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{61}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{67}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_6^{2015} \\ X_7^{2015} = (a_{71}+\varphi_{71})\cdot X_1^{2015}+\dots+(a_{77}+\varphi_{77})\cdot X_7^{2015}-(\varphi_{71}\cdot X_1^{2014}+\dots+\varphi_{77}\cdot X_7^{2014})+\bar{Y}_7^{2015} \end{cases}.$$

(4.1.2)

Тепер, підставивши відомі величини коефіцієнтів прямих витрат та коефіцієнтів вкладень (вони залишаються сталими для наступних років), а також валові випуски продукції за 2014 р. та кінцевий продукт за 2015 р. для кожної із 7-и галузей, отримаємо:

$$\begin{cases} X_1^{2015} = 0{,}1165 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}9798 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0603 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}8320 \cdot 23\,962{,}92) + 12\,200 \\ X_2^{2015} = 0{,}0622 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}3028 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0331 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}2427 \cdot 23\,962{,}92) + 3\,320 \\ X_3^{2015} = 0{,}0262 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}1064 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0079 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}0713 \cdot 23\,962{,}92) + 2\,075 \\ X_4^{2015} = 0{,}0356 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}2007 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0083 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}1580 \cdot 23\,962{,}92) + 3\,770 \\ X_5^{2015} = 0{,}0326 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}2753 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0222 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}2427 \cdot 23\,962{,}92) + 3\,800 \\ X_6^{2015} = 0{,}0169 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}1245 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0095 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}1060 \cdot 23\,962{,}92) + 1\,130 \\ X_7^{2015} = 0{,}0836 \cdot X_1^{2015} + \cdots + 0{,}3614 \cdot X_7^{2015} - (0{,}0461 \cdot 50\,273{,}36 + \cdots + 0{,}3047 \cdot 23\,962{,}92) + 6\,000 \end{cases}.$$

При розв'язуванні цієї системи рівнянь, матриця коефіцієнтів при невідомих змінних X_j^{2015} залишиться такою, як ця ж матриця коефіцієнтів при невідомих змінних X_j^{2014} (табл.4.1). А вектор вільних членів (табл. 4.5) системи рівнянь (4.1.2) набуде вигляду:

Таблиця 4.5

Вектор вільних членів системи рівнянь (4.4.1.2)

Вектор вільних членів
44 906,8655
23 222,6974
4 071,2760
6 744,2357
11 637,6267
6 268,4710
20 777,2008

Далі необхідно знайти обернену матрицю до матриці коефіцієнтів. Вона залишиться такою ж, як і на минулому етапі (табл. 3.3).

Знову застосуємо функцію *MMULT* в середовищі *MS Excel*, для розв’язку системи рівнянь (31.2).

Отримали вектор стовпець (табл.4.6) розмірністю 7x1, елементи якого і будуть шуканими величинами, тобто обсяг валового випуску продукції кожної галузі на 2015 рік:

Таблиця 4.6

Розрахований обсяг валової продукції на 2015 рік

Галузь	**Валовий випуск за 2014 рік**
Сільське господарство	65 882,44
Добувна промисловість	23 980,29
Будівництво	10 847,74
Переробна промисловість	18 683,41
Енергетика	14 971,91
Машинобудування	7 819,90
Харчова промисловість	31 108,29

Так само можна обчислювати валовий випуск продукції і на наступні роки. Для цього необхідно мати інформацію про кінцеве споживання (кінцевий продукт) за ці роки, а також обсяг валового випуску за попередні роки, та коефіцієнти прямих матеріальних витрат a_{ij} та та коефіцієнти вкладень (пропорційності, або їх ще називають коефіцієнтами приросту фондомісткості) φ_{ij}. На короткостроковий період ці коефіцієнти залишаються сталими.

4.4.2 Розв'язок замкненої моделі валової продукції

Розв'язок динамічної моделі валового продукту для простоти обчислення проілюструємо на прикладі двох галузей народного господарства.

Замкненою є модель виробничої сфери, яка при нульовому невиробничому споживанні має векторно-матричну форму:

$$B\frac{dx(t)}{d(t)} + (A - E)x(t) = 0\,, \tag{4.4.2.1}$$

Приймемо вектор початкових умов:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Задамо матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$

І матрицю приросту капіталомісткості:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $(A - E) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}6 \end{pmatrix}$.

Тепер обчислимо матрицю:

$$(A - E)x = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8x_1 & 0{,}3x_2 \\ 0{,}3x_1 & -0{,}6x_2 \end{pmatrix}.$$

На основі відомої матриці B, а також обчисленої матриці $(A - E)x$ представимо систему (4.4.2.1) в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot \dfrac{dx_1}{dt} + 0{,}5 \cdot \dfrac{dx_2}{dt} - 0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 = 0 \\ 1{,}0 \cdot \dfrac{dx_1}{dt} + 0{,}8 \cdot \dfrac{dx_2}{dt} + 0{,}3x_1 - 0{,}6x_2 = 0 \end{cases};$$

Розв'язуватимемо дану систему диференційних рівнянь за допомогою методу перетворення Лапласа. Виходячи з цього, замінимо рівняння їх зображеннями:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot \big(pX_1 - x_1(0)\big) + 0{,}5 \cdot \big(pX_2 - x_2(0)\big) - 0{,}8X_1 + 0{,}3X_2 = 0 \\ 1{,}0 \cdot \big(pX_1 - x_1(0)\big) + 0{,}8 \cdot \big(pX_2 - x_2(0)\big) + 0{,}3X_1 - 0{,}6X_2 = 0 \end{cases};$$

Тепер в цю систему рівнянь підставимо значення $x(0)$ і виведемо систему операторних рівнянь у виді лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot (pX_1 - 50) + 0{,}5 \cdot (pX_2 - 50) - 0{,}8X_1 + 0{,}3X_2 = 0 \\ 1{,}0 \cdot (pX_1 - 50) + 0{,}8 \cdot (pX_2 - 50) + 0{,}3X_1 - 0{,}6X_2 = 0 \end{cases};$$

Групуємо коефіцієнти змінних і отримуємо:

$$\begin{cases} (0{,}5p - 0{,}8)X_1 + (0{,}5p + 0{,}3)X_2 = 50 \\ (1{,}0p + 0{,}3)X_1 + (0{,}8p - 0{,}6)X_2 = 90 \end{cases};$$

Далі виведену систему алгебраїчних рівнянь розв'язуємо відносно X_1 та X_2. Для цього формуємо матрицю коефіцієнтів і вектор вільних членів:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5p - 0{,}8 & 0{,}5p + 0{,}3 \\ 1{,}0p + 0{,}3 & 0{,}8p - 0{,}6 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи шукаємо методом Крамера, де:

$$X_1 = \frac{1}{\Delta} \times (A_{11} \cdot 50 + A_{21} \cdot 90)\,;$$

$$X_2 = \frac{1}{\Delta} \times (A_{12} \cdot 50 + A_{22} \cdot 90) ;$$

Де

$\Delta -$ визначник матриці коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь;

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} -$ мінори цієї ж матриці.

Вони обчислюються як:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,5p - 0,8 & 0,5p + 0,3 \\ 1,0p + 0,3 & 0,8p - 0,6 \end{vmatrix} = (0,5p - 0,8) \cdot (0,8p - 0,6) - (0,5p + 0,3) \cdot (1,0p + 0,3) =$$

$$= -0,1p^2 - 1,39p + 0,39 ;$$

$$A_{11} = +(0,8p - 0,6);$$

$$A_{12} = -(1,0p + 0,3);$$

$$A_{21} = -(0,5p + 0,3);$$

$$A_{22} = +(0,5p - 0,8).$$

Тепер підставимо знайдені значення мінорів та визначника у відповідні рівняння і виведемо формули зображення змінних X_1 та X_2:

$$X_1(p) = \frac{(0,8p - 0,6) \cdot 50 - (0,5p + 0,3) \cdot 90}{-0,1p^2 - 1,39p + 0,39} = \frac{40p - 30 - 45p - 27}{-0,1p^2 - 1,39p + 0,39} =$$

$$= \frac{-5p - 57}{-0,1p^2 - 1,39p + 0,39};$$

Домножимо чисельник і знаменник дробу на (-10). Отримаємо:

$$X_1(p) = \frac{(-5p - 57) \cdot (-10)}{(-0,1p^2 - 1,39p + 0,39) \cdot (-10)} = \frac{50p + 570}{p^2 + 13,9 - 3,9} ;$$

$$X_2(p) = \frac{-(1,0p + 0,3) \cdot 50 + (0,5p - 0,8) \cdot 90}{-0,1p^2 - 1,39p + 0,39} = \frac{-50p - 15 + 45p - 72}{-0,1p^2 - 1,39p + 0,39} =$$

$$= \frac{-5p - 87}{-0,1p^2 - 1,39p + 0,39};$$

Також домножимо чисельник і знаменник дробу на (-10). Отримаємо:

$$X_2(p) = \frac{(-5p - 87) \cdot (-10)}{(-0,1p^2 - 1,39p + 0,39) \cdot (-10)} = \frac{50p + 870}{p^2 + 13,9 - 3,9} ;$$

У знаменниках виведених формул знаходяться характеристичні поліноми. Оригінали процесів $x_1(t)$ і $x_2(t)$ залежать від коренів характеристичного рівняння. Якщо корені дійсні, то рух монотонний, якщо комплексні - то коливальний. Параметри процесів $x_1(t)$ і $x_2(t)$ залежать від коренів характеристичного рівняння.

Нехай характеристичне рівняння має вигляд:

$$p^2 + 13,9p - 3,9 = 0 ;$$

Тоді:

$$D = 13,9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3,9) = 193,21 + 15,6 = 208,81 ;$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = \frac{-13,9 \pm \sqrt{208,81}}{2} = \frac{-13,9 \pm 14,45}{2} = -6,95 \pm 7,23 ,$$

$$\lambda_1 = 0,28 ;$$

$$\lambda_2 = -14,18 ;$$

Тепер характеристичний поліном розкладемо на прості множники:

$$p^2 + 13,9p - 3,9 \approx (p - 0,28)(p + 14,18).$$

Для вирішення системи диференціальних рівнянь вирази зображень $X_1(p)$ $X_2(p)$ представимо у вигляді суми найпростіших дробів:

$$X_1(p)=\frac{50p+570}{p^2+13{,}9-3{,}9}\approx\frac{k_1}{p-0{,}28}+\frac{k_2}{p+14{,}18},$$
$$X_2(p)=\frac{50p+870}{p^2+13{,}9-3{,}9}\approx\frac{k_3}{p-0{,}28}+\frac{k_4}{p+14{,}18}.$$

Значення коефіцієнтів k_1 та k_2 знаходять наступним чином:

$$k_1(p+14{,}18)+k_2(p-0{,}28)=(k_1+k_2)p+14{,}18k_1-0{,}28k_2\ .$$

Звідси випливає, що:

$$(k_1+k_2)p+14{,}18k_1-0{,}28k_2\approx 50p+570\ .$$

Тоді значення k_1 та k_2 можна обчислити, вирішивши наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_1+k_2=50 \\ 14{,}18k_1-0{,}28k_2=570 \end{cases};$$
$$k_1\approx 40{,}4\ ;\ \ k_2\approx 9{,}6\ .$$

Таким чином

$$X_1(p)\approx\frac{k_1}{p-0{,}28}+\frac{k_2}{p+14{,}18}\approx\frac{40{,}4}{p-0{,}28}+\frac{9{,}6}{p+14{,}18}.$$

Аналогічно розкладаємо на суму простіших дробів вираз $X_2(p)$. Значення коефіцієнтів k_3 та k_4 знаходимо наступним чином:

$$k_3(p+14{,}18)+k_4(p-0{,}28)=(k_3+k_4)p+14{,}18k_3-0{,}28k_4\ .$$

Звідси випливає, що:

$$(k_3+k_4)p+14{,}18k_3-0{,}28k_4\approx 50p+870\ .$$

Тоді значення k_3 та k_4 можна обчислити, вирішивши наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_3+k_4=50 \\ 14{,}18k_3-0{,}28k_4=870 \end{cases};$$
$$k_3\approx 61{,}1\ ;\ \ k_4\approx -11{,}1\ .$$

Таким чином

$$X_1(p)\approx\frac{k_3}{p-0{,}28}+\frac{k_4}{p+14{,}18}\approx\frac{61{,}1}{p-0{,}28}-\frac{11{,}1}{p+14{,}18}.$$

Оригінал вирішення знаходимо за таблицею відповідності; функції часу валового продукту будуть мати, очевидно, експоненційну форму:

$$x_1(t)\approx 40{,}4\cdot e^{0{,}28t}+9{,}6\cdot e^{-14{,}16\cdot t}\ ;$$
$$x_2(t)\approx 61{,}1\cdot e^{0{,}28t}-11{,}1\cdot e^{-14{,}16\cdot t}\ ;$$

З отриманого розв'язку випливає, що в нульовий момент часу об'єм валового випуску продукції в кожній галузі дорівнює:

$$x_1(0)\approx 40{,}4+9{,}6\approx 50\ ;$$
$$x_2(t)\approx 61{,}1-11{,}1\approx 50\ .$$

Отже, отримані валові випуски співпадають з умовами задачі.

Тепер знайдемо валові випуски продукції для наступного моменту часу:

$$x_1(1)\approx 40{,}4\cdot e^{0{,}28\cdot 1}+9{,}6\cdot e^{-14{,}16\cdot 1}\approx 53{,}45\ ;$$
$$x_2(t)\approx 61{,}1\cdot e^{0{,}28\cdot 1}-11{,}1\cdot e^{-14{,}16\cdot 1}\ \approx 80{,}84;$$

Слід зазначити, що другий доданок кожного процесу - функція часу, значення якої зменшується швидше, ніж збільшується значення першого доданка. Тому в довгостроковому періоді (≥ 5 років) ним можна знехтувати.

Сформулюємо основні висновки з розв'язку задачі:

1) динаміка в даному випадку має характер безперервного зростання валового випуску;

2) процес валового випуску кожної галузі відображають два доданки експоненціального виду;

3) другий доданок зміни валового продукту обох галузей швидко знижується до нуля, тому при розв'язанні задачі можна залишити лише перший доданок;

4) щорічний темп приросту валового випуску обох галузей становить 28%, тобто в даному16 випадку економічне зростання досить велике. Це пояснюється обраними значеннями коефіцієнтів матриць A і B.

4.4.3 Розв'язок відкритої моделі валової продукції

Відкритою являється модель виробничої сфери, котра при нульовому невиробничому споживанні має векторно-матричну форму:

$$B\frac{dx(t)}{d(t)} + (A - E)x(t) = c(t). \qquad (4.4.3.1)$$

Приймемо вектор початкових умов:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Задамо траєкторію споживання:

$$c(t) = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix} e^{0,2t}$$

Задамо матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},$$

І матрицю приросту капіталомісткості:

$$B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $(A - E) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 \\ 0,3 & -0,6 \end{pmatrix}.$

Тепер обчислимо матрицю:

$$(A - E)x = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 \\ 0,3 & -0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8x_1 & 0,3x_2 \\ 0,3x_1 & -0,6x_2 \end{pmatrix}.$$

На основі відомої матриці B і обчисленої матриці $(A - E)x$, представимо систему (4.4.3.1) у розгорнутому виді:

$$\begin{cases} 0,5 \cdot \dfrac{dx_1}{dt} + 0,5 \cdot \dfrac{dx_2}{dt} - 0,8x_1 + 0,3x_2 = 25 \cdot e^{0,2t} \\ 1,0 \cdot \dfrac{dx_1}{dt} + 0,8 \cdot \dfrac{dx_2}{dt} + 0,3x_1 - 0,6x_2 = 25 \cdot e^{0,2t} \end{cases};$$

Замінюємо диференціальні рівняння (33.1) їхніми зображеннями:

$$\begin{cases} 0,5 \cdot \left(pX_1 - x_1(0)\right) + 0,5 \cdot \left(pX_2 - x_2(0)\right) - 0,8X_1 + 0,3X_2 = \dfrac{25}{p - 0,2} \\ 1,0 \cdot \left(pX_1 - x_1(0)\right) + 0,8 \cdot \left(pX_2 - x_2(0)\right) + 0,3X_1 - 0,6X_2 = \dfrac{25}{p - 0,2} \end{cases};$$

Тепер в цю систему рівнянь підставимо значення $x(0)$ і виведемо систему операторних рівнянь у виді лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0,5 \cdot (pX_1 - 50) + 0,5 \cdot (pX_2 - 50) - 0,8X_1 + 0,3X_2 = \dfrac{25}{p - 0,2} \\ 1,0 \cdot (pX_1 - 50) + 0,8 \cdot (pX_2 - 50) + 0,3X_1 - 0,6X_2 = \dfrac{25}{p - 0,2} \end{cases};$$

Групуємо коефіцієнти змінних і отримуємо:

$$\begin{cases} (0,5p - 0,8)X_1 + (0,5p + 0,3)X_2 = \dfrac{50p + 15}{p - 0,2} \\ (1,0p + 0,3)X_1 + (0,8p - 0,6)X_2 = \dfrac{90p + 7}{p - 0,2} \end{cases};$$

Виведену систему розв'язуємо відносно X_1 та X_2 . Для цього, спершу, сформуємо матрицю17 коефіцієнтів і вектор вільних членів:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5p-0{,}8 & 0{,}5p+0{,}3 \\ 1{,}0p+0{,}3 & 0{,}8p-0{,}6 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} \dfrac{50p+15}{p-0{,}2} \\ \dfrac{90p+7}{p-0{,}2} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи шукаємо методом Крамера, де:

$$X_1 = \frac{1}{\Delta} \times \left[A_{11} \cdot \left(\frac{50p+15}{p-0{,}2} \right) + A_{21} \cdot \left(\frac{90p+7}{p-0{,}2} \right) \right] ;$$

$$X_2 = \frac{1}{\Delta} \times \left[A_{12} \cdot \left(\frac{50p+15}{p-0{,}2} \right) + A_{22} \cdot \left(\frac{90p+7}{p-0{,}2} \right) \right] ;$$

Де

$\Delta -$ визначник матриці коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь;

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} -$ мінори цієї ж матриці.

Отож, маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}5p-0{,}8 & 0{,}5p+0{,}3 \\ 1{,}0p+0{,}3 & 0{,}8p-0{,}6 \end{vmatrix} = (0{,}5p-0{,}8)\cdot(0{,}8p-0{,}6) - (0{,}5p+0{,}3)\cdot(1{,}0p+0{,}3) =$$

$$= -0{,}1p^2 - 1{,}39p + 0{,}39 ;$$

$$A_{11} = +(0{,}8p-0{,}6);$$

$$A_{12} = -(1{,}0p+0{,}3);$$

$$A_{21} = -(0{,}5p+0{,}3);$$

$$A_{22} = +(0{,}5p-0{,}8).$$

Тепер підставимо знайдені значення мінорів та визначника у відповідні рівняння і виведемо формули зображення змінних X_1 та X_2:

$$X_1 = \frac{1}{-0{,}1p^2 - 1{,}39p + 0{,}39} \times \left[(0{,}8p-0{,}6)\cdot\left(\frac{50p+15}{p-0{,}2}\right) - (0{,}5p+0{,}3)\cdot\left(\frac{90p+7}{p-0{,}2}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{-0{,}1p^2 - 1{,}39p + 0{,}39} \times \left(\frac{40p^2 - 18p - 9}{p-0{,}2} - \frac{45p^2 + 30{,}5 + 2{,}1}{p-0{,}2} \right) =$$

$$= \frac{1}{-0{,}1p^2 - 1{,}39p + 0{,}39} \times \frac{-5p^2 - 48{,}5p - 11{,}1}{p-0{,}2} = \frac{-5p^2 - 48{,}5p - 11{,}1}{(-0{,}1p^2 - 1{,}39p + 0{,}39)\cdot(p-0{,}2)} ;$$

Домноживши чисельник і знаменник на (-10) отримаємо:

$$X_1 = \frac{50p^2 + 485p + 111}{(p^2 + 13{,}9p - 3{,}9)\cdot(p-0{,}2)} ;$$

Аналогічно отримуємо операторне рівняння і другого процесу:

$$X_2 = \frac{50p^2 + 985p + 101}{(p^2 + 13{,}9p - 3{,}9)\cdot(p-0{,}2)} ;$$

Оскільки вираз $(p^2 + 13{,}9p - 3{,}9)$ розкладається на $(p-0{,}28)(p+14{,}18)$, тоді

$$X_1 = \frac{50p^2 + 485p + 111}{(p-0{,}28)(p+14{,}18)(p-0{,}2)} ;$$

$$X_2 = \frac{50p^2 + 985p + 101}{(p-0{,}28)(p+14{,}18)(p-0{,}2)} ;$$

Для вирішення системи диференціальних рівнянь вирази зображень $X_1(p)$ $X_2(p)$ представимо у вигляді суми найпростіших дробів:

$$X_1 = \frac{50p^2 + 485p + 111}{(p-0{,}28)(p+14{,}18)(p-0{,}2)} \approx \frac{k_1}{p-0{,}28} + \frac{k_2}{p+14{,}18} + \frac{k_3}{p-0{,}2} ;$$

$$X_2 = \frac{50p^2 + 985p + 101}{(p-0{,}28)(p+14{,}18)(p-0{,}2)} \approx \frac{k_4}{p-0{,}28} + \frac{k_5}{p+14{,}18} + \frac{k_6}{p-0{,}2} .$$

Щоб обчислити коефіцієнти k_1, k_2 та k_3 знаходимо чисельник суми найпростіших дробів:

$$k_1(p+14{,}18)(p-0{,}2)+k_2(p-0{,}28)(p-0{,}2)+k_3(p-0{,}28)(p+14{,}18)=$$
$$=(k_1+k_2+k_3)p^2+(13{,}98k_1-0{,}48k_2+13{,}9k_3)p-2{,}836k_1+0{,}056k_2+3{,}9704k_3\ .$$

Тепер отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=50 \\ 13{,}98k_1-0{,}48k_2+13{,}9k_3=485 \\ -2{,}836k_1+0{,}056k_2+3{,}9704k_3=111 \end{cases};$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$k_1\approx 4{,}5\ ;\ \ k_2\approx 14{,}6\ ;\ \ k_3\approx 30{,}9\ .$$

Аналогічно обчислимо і значення коефіцієнтів k_4, k_5, k_6 :

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=50 \\ 13{,}98k_1-0{,}48k_2+13{,}9k_3=985 \\ -2{,}836k_1+0{,}056k_2+3{,}9704k_3=101 \end{cases};$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$k_4\approx 25{,}8\ ;\ \ k_5\approx -20{,}0\ ;\ \ k_6\approx 44{,}2\ .$$

Таким чином, отримали зображення процесів:

$$X_1\approx\frac{4{,}5}{p-0{,}28}+\frac{14{,}6}{p+14{,}18}+\frac{30{,}9}{p-0{,}2}\ ;$$
$$X_2\approx\frac{25{,}8}{p-0{,}28}-\frac{20{,}0}{p+14{,}18}+\frac{44{,}2}{p-0{,}2}\ .$$

Оригінал вирішення знаходимо за таблицею відповідності; функції часу валового продукту будуть мати експоненційну форму:

$$x_1(t)=4{,}5\cdot e^{0{,}28\cdot t}+14{,}6\cdot e^{-14{,}18\cdot t}+30{,}9\cdot e^{0{,}2\cdot t}\ .$$
$$x_2(t)=25{,}8\cdot e^{0{,}28\cdot t}-20{,}0\cdot e^{-14{,}18\cdot t}+44{,}2\cdot e^{0{,}2\cdot t}\ .$$

Можна побачити, що в нульовий момент часу величина валового випуску продукції в обох галузях дорівнює 50, що відповідає умові задачі.

Тепер знайдемо валові випуски продукції для наступного моменту часу:

$$x_1(1)=4{,}5\cdot e^{0{,}28\cdot 1}+14{,}6\cdot e^{-14{,}18\cdot 1}+30{,}9\cdot e^{0{,}2\cdot 1}\approx 5{,}95+0+37{,}74\approx 43{,}7\ .$$
$$x_2(1)=25{,}8\cdot e^{0{,}28\cdot 1}-20{,}0\cdot e^{-14{,}18\cdot 1}+44{,}2\cdot e^{0{,}2\cdot 1}\approx 34{,}14+0+53{,}99\approx 88{,}1\ .$$