Конспект лекції № 2

Тема № 2. Типові економіко-математичні моделі

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Дослідження операцій", „Економіко-математичні методи та моделі" та „Оптимізаційні методи та моделі".

Мета лекції: познайомити з основними видами економіко-математичних моделей. Навчитися будувати економіко-математичні моделі та розв'язувати їх за допомогу пошуку рішень в MS Excel.

Ключові поняття та терміни

- модель оптимального використання ресурсів
- модель оптимального розкрою матеріалів
- модель оптимального складу суміші
- обмеження моделі
- оптимізаційна модель
- область допустимих розв'язків
- цільова функція моделі

План лекції

1. Модель оптимального використання невзаємозамінного обладнання
2. Модель оптимального використання взаємозамінного обладнання
3. Асортиментна задача (задача максимізації кількості комплектів)
4. Модель оптимального розкроювання промислових матеріалів
5. Задача виготовлення суміші оптимального складу
6. Задача про призначення
7. Модель оптимального вибору інтенсивності технологічних способів
8. Приклади розв'язування типових задач до теми №2

Інформаційні джерела:

Основна та допоміжна література:

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц./ В. В. Вітлінський, Г. І. Великоіваненко. – К.: КНЕУ, 2005. – 306 с.
2. Вовк В.М. Оптимізаційні моделі економіки : навч. посібник / В.М. Вовк, Л.М. Зомчак. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 318 с.
3. Дацко М. В. Дослідження операцій в економіці: навч. посіб. / М. В. Дацко, М. М. Карбовник. – Л. : ПАІС, 2009. – 288 с.
4. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ "Економічна думка", 2008. – 704 с.

Навчальне обладнання: ТЗН, презентація тощо: ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

1.Модель оптимального використання невзаємозамінного обладнання

Для виготовлення $m, i=\overline{1,m}$ видів продукції на підприємстві використовують n, $j=\overline{1,n}$ видів невзаємозамінних ресурсів і на виготовлення одиниці продукції j-го виду витрачають a_{ij} ресурсів i-го виду, а сумарний запас ресурсу i-го виду становить A_i одиниць. Прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду становить P_j. Необхідно визначити такий план випуску продукції, який би забезпечив отримання максимального прибутку, з урахуванням наявного запасу ресурсів.

Індекси:

i– індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$;

j– індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$.

Параметри:

a_{ij} – норми витрат ресурсів i-го виду на виготовлення продукції j-го виду;

A_i – запас ресурсу i-го виду;

P_j – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду.

Змінні:

x_j – кількість продукції j-го виду, яку будуть виготовляти.

Цільова функція:

$max\,P,\quad P=\sum_{j=1}^{n} P_j x_j$ –величина прибутку від всієї продукції.

Обмеження:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i,\quad i=\overline{1,m}$ – обмеження на ресурси;

$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,n}$ – умова невід’ємності змінних.

Це одна з типових задач оптимізації виробничої програми підприємства. У якості критерію оптимальності також можуть бути використані: дохід, собівартість, витрати часу роботи обладнання, коефіцієнт завантаження обладнання, рентабельність випуску тощо.

2. Модель оптимального використання взаємозамінного обладнання

Нехай на підприємстві використовують $m, i=\overline{1,m}$ видів взаємозамінних ресурсів для виготовлення n, $j=\overline{1,n}$ видів продукції. Норми витрат ресурсів *i*-го виду на виготовлення одиниці продукції *j*-го виду становлять a_{ij}, а сумарний запас ресурсу *i*-го виду – A_i. Від продажу одиниці продукції *j*-го виду підприємство отримує прибуток в розмірі P_j. Необхідно визначити такий план випуску продукції, який би забезпечив для виробника отримання максимального прибутку, з урахуванням наявного запасу ресурсів.

Індекси:

i– індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$;

j– індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$.

Параметри:

a_{ij} – норми витрат ресурсів *i*-го виду на виготовлення продукції *j*-го виду;

A_i – запас ресурсу *i*-го виду;

P_{ij} – прибуток від реалізації одиниці продукції *j*-го виду, виготовленої із використанням ресурсу *i*-го виду.

Змінні:

x_{ij} – кількість продукції *j*-го виду, яку будуть виготовляти із використанням ресурсу *i*-го виду.

Цільова функція:

$max\ P,\quad P=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}x_{ij}$ – обсяг прибутку від продажу всієї продукції.

Обмеження:

$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\le A_i,\quad i=\overline{1,m}$ – обмеження на ресурси;

$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ – умова невід’ємності змінних.

3. Асортиментна задача (задача максимізації кількості комплектів)

Нехай для виготовлення $n, j=\overline{1,n}$ видів продукції на підприємстві використовують $m, i=\overline{1,m}$ видів невзаємозамінних ресурсів. На виготовлення одиниці продукції *j*-го виду витрачають a_{ij} ресурсів *i*-го виду, а сумарний запас ресурсу *i*-го виду становить A_i. Продукцію необхідно виготовляти в таких пропорціях, щоб при формуванні комплектів не було залишку. Необхідно визначити такий план випуску продукції, який би забезпечив для виробника отримання максимальної кількості комплектів, з урахуванням наявного запасу ресурсів.

Індекси:

i– індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$;

j– індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$.

Параметри:

a_{ij} – норми витрат ресурсів *i*-го виду на виготовлення одиниці продукції *j*-го виду;

A_i – запас ресурсу *i*-го виду;

K_j – кількість одиниць продукції *j*-го виду, котра входить в один комплект.

Змінні:

x_j – кількість продукції *j*-го виду, яку будуть виготовляти;

Z – кількість комплектів.

Цільова функція:

$max\ Z$ – максимізація кількості комплектів.

Обмеження:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i,\quad i=\overline{1,m}$ – обмеження на ресурси;

$\frac{x_j}{K_j} \ge Z \quad j=\overline{1,n}$ – обмеження комплектності;

$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,n}\ ,\ Z \ge 0$ – умова невід'ємності змінних.

4. Модель оптимального розкроювання промислових матеріалів

Нехай є вихідний матеріал стандартної форми (колоди, труби, рулони, профільний прокат, прутки чи листи певних розмірів) в кількості *M* штук, з якого треба викроїти заготовки *n* видів. Для кожного виду заготовок задане планове завдання B_j. Відомо *m* варіантів розкрою, кожен з яких характеризується такими величинами: a_{ij}– кількість заготовок *j*-го виду, яку отримують при розкроюванні одиниці вхідного матеріалу за *i*-м варіантом розкрою; d_i– значення втрат (відходів) матеріалу при розкроюванні одиниці вхідного матеріалу за допомогою *i*-го способу розкрою. Необхідно визначити кількість одиниць вхідного матеріалу, які розкроєні *j*-м способом і забезпечують виконання планового завдання по заготовках із найменшими втратами матеріалу.

Індекси:

i– індекс варіанту розкрою, $i = \overline{1,m}$;

j– індекс виду заготовки, $j = \overline{1,n}$.

Параметри:

a_{ij} – кількість заготовок *j*-го виду, яку отримують при розкроюванні одиниці вхідного матеріалу *i*-м варіантом розкрою;

d_i –відходи при розкроюванні одиниці вхідного матеріалу *i*-м варіантом розкрою;

M– кількість одиниць вхідного матеріалу;

B_j – план випуску заготовок *j*-го виду;

Змінні:

x_i – кількість одиниць вхідного матеріалу, розкроєних *i*-м варіантом розкрою.

Цільова функція:

$min\ D;\quad D = \sum_{i=1}^{m} d_i x_i$ – мінімізація сумарних відходів при розкроюванні матеріалів.

Обмеження:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = B_j, \quad j = \overline{1,n}$$ – обмеження на виконання плану;

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \le M$$ – обмеження на використання вхідного матеріалу;

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$ – умова невід’ємності змінних.

Процес розв’язування задачі про розкрій матеріалів можна розбити на два етапи: на першому етапі визначають усі повноцінні варіанти розкрою матеріалів, а на другому етапі розв’язують задачу лінійного програмування для визначення інтенсивності застосування цих способів для кожного з варіантів розкрою.

5. Задача виготовлення суміші оптимального складу

Нехай є $n,\ j=\overline{1,n}$ компонентів, з яких треба виготовити суміш (скласти дієту, сформувати раціон, сплав металів). Суміш характеризується такими величинами: A_j^{min}, A_j^{max} – граничний вміст (нижня та верхня межі відповідно) у суміші певних інгредієнтів у розрахунку на одиницю її виміру, наприклад, маси. Вміст інгредієнтів в одиниці маси відповідного компонента визначається величинами $A_{ij}\ ,(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Собівартість одиниці маси *j*-го компонента рівна C_j. Потрібно знайти таку кількість кожного компонента, який включений в одиницю маси суміші, що забезпечить її мінімальну собівартість.

Індекси:

i– індекс виду складника суміші, $i=\overline{1,m}$;

j– індекс виду інгредієнта, $j=\overline{1,n}$.

Параметри:

a_{ij} – вміст інгредієнта *j*-го виду в одиниці складника суміші *i*-го виду;

A_j^{min} – нижня межа вмісту інгредієнта *j*-го виду в одиниці суміші;

A_j^{max} – верхня межа вмісту інгредієнта *j*-го виду в одиниці суміші;

P_j – собівартість одиниці складника *i*-го виду.

Змінні:

x_i – частка складника *i*-го виду в одиниці суміші.

Цільова функція:

$min P,\quad P=\sum_{j=1}^{n} P_i x_i$ – собівартість одиниці суміші.

Обмеження:

$A_j^{min} \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le A_j^{max},\quad j=\overline{1,n}$–обмеження на вміст інгредієнта *j*-го виду в одиниці суміші;

$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$– обмеження на частки складників у одиниці суміші;

$x_i \ge 0,\quad i=\overline{1,n}$ – умова невід’ємності змінних.

6. Задача про призначення

Необхідно розподілити *n* видів робіт між *n* працівниками за умови, що кожен робітник може виконувати будь-яку, але лише одну роботу, а кожна робота повинна бути виконана одним робітником. Собівартість виконання *i*-ої роботи *j*-м робітником становить C_{ij}.Необхідно запропонувати такий план закріплення робіт за виконавцями, який забезпечить мінімальну собівартість їх виконання.

Індекси:

i– індекс виду роботи, $i=\overline{1,n}$;

j– індекс робітника, $j=\overline{1,n}$.

Параметри:

C_{ij} – собівартість виконання *i*-ої роботи *j*-м робітником.

Змінні:

$$x_{ij} - \begin{cases} 0, & якщо\ j-ий\ виконавець\ не\ виконує\ i-oї\ роботи; \\ 1, & якщо\ j-ий\ виконавець\ виконує\ i-ту\ роботу; \end{cases}$$

Цільова функція:

$min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$ – мінімізація собівартості виконання всіх робіт.

Обмеження:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=\overline{1,n}$ – кожну роботу може виконувати лише один робітник;

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=\overline{1,n}$ – кожен робітник може виконувати лише одну роботу;

Для отримання лише булевих змінних (таких, що можуть мати значення лише 0 або 1) можна записати нелінійне обмеження $x_{ij}(1-x_{ij})=0,\ i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,n}$.

Коефіцієнтами цільової функції також можуть бути показники ефективності виконання робіт працівниками, прибуток, тощо. У такому випадку потрібно запропонувати такий план розподілу робіт за виконавцями, при якому цільова функція набуває максимального значення.

7. Модель оптимального вибору інтенсивності технологічних способів

Нехай відомо $n, j=\overline{1,n}$ виробничих способів і $m, i=\overline{1,m}$ інгредієнтів, які характеризують виробничий процес. Норма участі *i*-го інгредієнта в *j*-му виробничому способі визначається величиною a_{ij} у розрахунку на одиничну інтенсивність цього способу. При $a_{ij} > 0$ здійснюється випуск *i*-го інгредієнта *j*-м способом, а при $a_{ij} < 0$ цей інгредієнт витрачається.

Величина A_i означає загальний обсяг *i*-го інгредієнта. Це може бути, наприклад, ліміт ресурсу, тоді $A_i < 0$, або планове завдання на кінцевий випуск продукції, тоді $A_i > 0$. Якщо $A_i=0$, то *i*-й інгредієнт становить проміжну продукцію, яку випускають і споживають повністю у процесі виробництва на даному підприємстві.

Відомий також показник ефективності кожного з виробничих способів P_j. У цьому випадку будемо вважати його значенням прибутку, який можна отримати завдяки застосуванню *j*-го способу з одиничною інтенсивність.

Треба відшукати набір значень $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$– інтенсивності для кожного із взятих до розгляду виробничих способів. Набір цих значень повинен забезпечувати максимальну сумарну ефективність виробництва.

Індекси:

i – індекс інгредієнта, який характеризує виробничий процес, $i=\overline{1,m}$;

j– індекс виробничого способу, $j=\overline{1,n}$.

Параметри:

a_{ij} – норма участі *i*-го інгредієнта в *j*-му виробничому способі;

A_i – загальний обсяг *i*-го інгредієнта;

P_j – прибуток, який можна отримати завдяки застосуванню *j*-го способу на одиничну інтенсивність.

Змінні:

x_j – інтенсивність застосування виробничого способу.

Цільова функція:

$L=\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max$, максимізація величини прибутку.

Обмеження:

$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \ge A_i, i=\overline{1,m}$ – обмеження запасу інгредієнта;

$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$ – умова невід’ємності змінних.

8.Приклади розв’язування типових задач до теми №2

Приклад 2.1. Підприємство виготовляє вироби зі скла, зокрема скляні міжкімнатні двері та двері до шаф-купе. При виготовленні виробів зі скла обов'язковою є обробка кромки скла, що запобігає порізам і травмам під час експлуатації виробів.

Для досягнення найкращих результатів застосовують шліфування та полірування. Для виготовлення одних міжкімнатних дверей необхідно 4 год шліфувати та 5 год полірувати, а для дверей до шаф-купе – 2 год шліфувати та 5 год полірувати. У власності виробника 2 шліфувальні верстати та 3 полірувальні. Кожен шліфувальний верстат може працювати 40 год щотижня, а кожен полірувальний – 60 год щотижня.

Попит на ринку значно перевищує виробничі можливості, тому вся виготовлена продукція гарантовано буде продана. Прибуток від продажу міжкімнатних дверей становить 3 г.о., а від продажу дверей до шаф-купе – 4 г.о. Як необхідно виробнику розподілити час роботи верстатів між видами продукції, щоб отримати максимальний тижневий прибуток?

Розв'язування:

Нехай x_1– кількість міжкімнатних дверей, які будуть виготовлятися; x_2 – кількість дверей до шаф-купе, які буде виготовляти виробник.

Очевидно, що $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$, тобто кількості виготовленої продукції не можуть бути від'ємними. Виробник отримує прибуток 3 г.о. від продажу одних дверей, а вироблятиме двері в кількості x_1, отже, від продажу всіх виготовлених дверей він отримає прибуток в розмірі $3 \cdot x_1$, аналогічно від продажу одних дверей до шаф-купе він отримує 4 г.о., тоді від збуту всіх дверей до шаф-купе отримує $4 \cdot x_2$. Отже, цільову функцію максимізації загального обсягу прибутку виробника запишемо у такому вигляді:

$$P = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to max.$$

Якщо б не було обмежень, то прибуток міг би зростати як завгодно високо, але виробничі можливості підприємства обмежені наявним ресурсом часу роботи обладнання. В умові зазначено, що одні міжкімнатні двері необхідно шліфувати 4 год, а одні двері до шаф-купе – 2 год, тоді як шліфувальний верстат над виготовлення всього обсягу продукції може працювати не більше 40 год, а оскільки верстатів два, то отримуємо 80 год роботи. Отже, обмеження на використання шліфувального верстату матиме вигляд:

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 80.$$

Розглянемо використання полірувального верстату: одні міжкімнатні двері необхідно полірувати 2 год, а одні двері до шаф-купе – 5 год, всього полірувальний верстат може працювати 60 год, а їх три, тому отримуємо 180 год, отже, обмеження на використання полірувального верстату матиме вигляд:

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 180.$$

Додавши умови невід'ємності змінних (бо кількість виготовленої продукції не може бути від'ємною), отримаємо модель:

Цільова функція:

$$P = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to max.$$

Обмеження:

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 80,$$
$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 180.$$

Умови невід'ємності:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Приклад 2.2. Дієтолог складає м'ясне меню для обслуговування учасників спортивних змагань. З усіх видів м'яса для закупівлі обрано свинину, баранину та яловичину, які відрізняються вмістом білків, жирів та вуглеводів. У таблиці 2.1 вказано вміст білків, жирів та вуглеводів у 1000 вагових одиниць(в.о.) м'яса кожного виду, вартість 1000 в.о. м'яса та мінімальна денна потреба у білках, жирах та вуглеводах, які будуть отримані учасниками змагань від споживання м'яса.

Мінімальна порція м'яса, яку отримує спортсмен – 700 в.о. Необхідно визначити обсяги закупівлі м'яса, які б дозолили забезпечити денну потребу спортсменів у білках, жирах та вуглеводах найменшим коштом.

Таблиця2.1

Вид м'яса	Вміст поживних речовин у 1000 в.о.м'яса			Ціна1000в.о.м'яса, г.о.
	Білків	Жирів	Вуглеводів	
Свинина	220	300	30	80
Баранина	220	170	0	100
Яловичина	260	170	0	60
Мінімальна потреба	400	500	100	

Розв'язування:

Нехай необхідно закупити свинини, баранини і яловичини, відповідно (кг) – x_1, x_2, x_3.

У цільовій функції запишемо загальну вартість м'яса всіх типів:

$$P = 80 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 60 \cdot x_3 \to min$$

Оскільки необхідно забезпечити виконання мінімальної денної потреби спортсменів у білках, жирах та вуглеводах, отриманих від споживання м'яса, то матимемо три обмеження забезпечення мінімальної денної потреби спортсменів у:

білках:

$$220 \cdot x_1 + 220 \cdot x_2 + 260 \cdot x_3 \geq 400 \,,$$

жирах:

$$300 \cdot x_1 + 170 \cdot x_2 + 170 \cdot x_3 \geq 500 \,,$$

вуглеводах:

$$30 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \geq 100 \,.$$

Ще одне обмеження на розмір порції їжі:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 700.$$

А також умови невід'ємно стіневідомих змінних:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\,.$$

Приклад 2.3. Ресторатор відкриває новий ресторан та виділяє 800000 г.о. з маркетингового бюджету на рекламування закладу в найближчий місць. Він розглядає такі типи реклами:

а) 30-секундні ролики на місцевому телебаченні;

б) 30-секундні ролики на місцевому радіо;

в) реклама в газеті на половину сторінки;

г) реклама на повну сторінку у журналі-тижневику, який виходитиме чотири рази впродовж періоду.

Ресторатор розглядає як цільову аудиторію сім'ї з доходом близько 50000 г.о. Охоплення рекламою для сімей з різним доходом та вартість у медіа різних типів вказана у таблиці2.2.

Для отримання збалансованого представлення у медіа різних типів накладено такі обмеження:

а) реклама на телебаченні – не більше чотирьох разів;

б) реклама у журналі – не більше чотирьох разів;

в) реклама у друкованих виданнях (газета та журнал) – не більше 60% від загальної реклами;

г) хоча б 4500000 охоплення для сімей із доходом вищим, ніж 50000 г.о.

Сформулюйте задачу лінійного програмування для визначення кількості повторень реклами з метою максимізації охоплення аудиторії.

Таблиця 2.2

Тип медіа	Вартість реклами, г.о.	З річним доходом більше 50000 г.о.	З доходом менше 50000 г.о.
Телебачення	40000	200000	300000
Радіо	20000	500000	700000
Газета	15000	300000	150000
Журнал	5000	100000	100000

Розв'язування:

Введемо позначення невідомих:

x_1 – кількість реклами на телебаченні;

x_2 – кількість реклами на радіо;

x_3 – кількість реклами в газеті;

x_4 – кількість реклами в журналі.

Очевидно, що кількість є величиною невід'ємною, тому повинні виконуватися умови:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

У цільовій функції максимізуємо охоплення аудиторії рекламою в медіа різних типів, розділивши аудиторію на дві групи:

$$E = (200000 + 300000)x_1 + (500000 + 700000)x_2 +$$
$$+ (300000 + 150000)x_3 + (100000 + 100000)x_4 =$$
$$= 500000x_1 + 1200000x_2 + 450000x_3 + 200000x_4 \rightarrow max$$

Обмеженим є бюджет, виділений на проведення рекламної кампанії:

$$40000x_1 + 20000x_2 + 15000x_3 + 5000x_4 \leq 800000.$$

До структури рекламної кампанії поставлені конкретні вимоги:

а) реклама на телебаченні – не більше чотирьох разів, що запишемо у вигляді обмеження:

$$x_1 \leq 4;$$

б) реклама у журналі – не більше чотирьох разів:

$$x_2 \leq 4;$$

в) реклама у друкованих виданнях (газета та журнал) – не більше 60% від загальної реклами:

$$\frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \leq 0{,}06,$$

або це обмеження можна переписати у такому вигляді:

$$-0{,}06x_1 - 0{,}06x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}4x_4 \leq 0;$$

г) хоча б 4500000 охоплення рекламою для сімей із доходом вищим, ніж 50000 г.о.:

$$200000x_1 + 500000x_2 + 300000x_3 + 100000x_4 \geq 4500000.$$

Отже, запишемо економіко-математичну модель ситуації.

Цільова функція:

$$E = 500000x_1 + 1200000x_2 + 450000x_3 + 200000x_4 \rightarrow max.$$

Обмеження:

$$40000x_1 + 20000x_2 + 15000x_3 + 5000x_4 \le 800000,$$
$$x_1 \le 4,$$
$$x_2 \le 4,$$
$$-0{,}06x_1 - 0{,}06x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}4x_4 \le 0,$$
$$200000x_1 + 500000x_2 + 300000x_3 + 100000x_4 \ge 4500000.$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Приклад 2.4. Для виготовлення трьох виробів А, В і С фірма «Галсамокат» використовує токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне устаткування. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів устаткування вказані в таблиці 2.3. У ній вказаний також загальний фонд робочого часу кожного з типів виробничого устаткування, а також ціна одного виробу кожного виду. Сформулюйте економіко-математичну модель ситуації.

Таблиця 2.3

Устаткування	Норми витрати часу (станко-год)			Ресурс часу устаткування (год)
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Ціна (грн)	10	14	12	

Розв’язування:

Введемо систему позначень:

i – індекс устаткування, $i = \overline{1,4}$;

j – індекс виду продукції, $j = \overline{1,3}$;

a_{ij} – норми витрат часу роботи устаткування i-го виду на виготовлення одиниці продукції j-го виду;

b_i – ресурс часу роботи устаткування i-го виду;

P_j – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду;

x_j – кількість продукції j-го виду, яку планують виробляти.

Запишемо економіко-математичну модель задачі.

Цільова функція максимізації прибутку підприємства:

$$\sum_{j=1}^{3} P_j x_j \to max.$$

Обмеження на фонд часу роботи обладнання:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,4};$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Цю модель можна записати у більш деталізованому вигляді:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 \to max;$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3,$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0.$$

Модель у явному вигляді запишемо так:

$$10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to max;$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 120,$$

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0.$$

Приклад 2.5. Знайти оптимальний варіант розкрою труб довжиною 5м з критерієм величини відходів на заготовки довжиною 2,5м, 2м, 1,5м, якщо план випуску цих заготовок відповідно 33 шт., 77 шт., 120 шт. На розкрій надходить 120 труб.

Завдання:

1. Побудувати економіко-математичну модель задачі.

2. Як зміниться модель задачі розкрою, якщо співвідношення між заготовками складає 1:2:3.

3. Як зміниться модель задачі розкрою, якщо на розкрій надійшло ще 50 труб довжиною 7 м.

Розв'язування:

1) Введемо систему позначень:

i – індекс варіанту розкрою, $i = \overline{1,6}$;

j – індекс виду заготовки, $j = \overline{1,3}$;

a_{ij} – кількість заготовок j-го виду, які одержують розкроюючи одну одиницю вхідного матеріалу i-им технологічним способом;

B_j – план випуску заготовок j-го виду;

M– кількість одиниць вхідного матеріалу;

d_i – величина відходів, одержаних під час розкроювання одиниці вихідного матеріалу i-им способом;

x_i – кількість одиниць вхідного матеріалу, яку планують розкроїти i-им способом.

Побудуємо спочатку матрицю варіантів розкрою (таблиця 2.4):

Математична модель задачі матиме наступний вигляд.

Таблиця 2.4

Варіант розкрою	Вид заготовки			Відходи
	2,5 м	2 м	1,5 м	
1	2	0	0	0
2	1	1	0	0,5
3	1	0	1	1
4	0	2	0	1
5	0	1	2	0
6	0	0	3	0,5

Цільова функція мінімізації сумарних відходів від розкрою матеріалу всіма варіантами:

$$min\ D; \quad D = \sum_{i=1}^{6} d_i x_i\ ;$$

Умова необхідності виконання виробничої програми:

$$\sum_{i=1}^{6} a_{ij} x_i = B_j\,, \quad j = \overline{1,3}.$$

Обмеження на обсяги використання вхідного матеріалу:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \le M\ .$$

Умови невід'ємності невідомих:

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}\ .$$

Модель у розширеній формі запису:

$$min\ D; \quad D = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 + d_5x_5 + d_6x_6\,;$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 + a_{51}x_5 + a_{61}x_6 = B_1;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 + a_{52}x_5 + a_{62}x_6 = B_2\,;$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 + a_{53}x_5 + a_{63}x_6 = B_3;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le M;$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

З використанням поданої інформації модель матиме вигляд:

$$min\ D; \quad D = 0{,}5x_2 + x_3 + x_4 + 0{,}5x_6;$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 33;$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 = 77;$$
$$x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 120;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 120;$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

2) Врахування того, що співвідношення між кількостями заготовок кожного виду становить 1:2:3, потребує до попередньої моделі ще додати умову, яка б забезпечила виготовлення деталей у відповідних пропорціях.

Уточнена модель:

$$min\ D; \quad D = \sum_{i=1}^{6} d_i x_i;$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{6} a_{i1}x_i}{k_1} = \frac{\sum_{i=1}^{6} a_{i2}x_i}{k_2} = \frac{\sum_{i=1}^{6} a_{i3}x_i}{k_3};$$
$$\sum_{i=1}^{6} x_i \le M;$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

З використанням поданої інформації модель матиме вигляд:

$$min\ D; \quad D = 0{,}5x_2 + x_3 + x_4 + 0{,}5x_6;$$
$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{1} = \frac{x_2 + 2x_4 + x_5}{2} = \frac{x_3 + 2x_5 + 3x_6}{3};$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 120;$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

3) Якщо на розкрій надходять труби різної довжини, то виникає необхідність змінити модель.

У таблиці 2.5 подано перелік повноцінних варіантів розкрою для нового матеріалу та їх характеристики.

Таблиця 2.5

Варіант розкрою	Вид заготовки			Відходи
	2,5 м	2 м	1,5 м	
1	2	1	0	0
2	2	0	1	0,5
3	1	2	0	0,5
4	1	1	1	1
5	1	0	3	0
6	0	3	0	1
7	0	2	2	0
8	0	1	3	0,5
9	0	0	4	1

Для даної постановки задачі запишемо нову систему позначень і відповідну математичну модель:

q – індекс виду сировини, $q=\overline{1,2}$;

i – індекс варіанта розкрою, $i=\overline{1,m_q}$;

j – індекс виду заготовки, $j=\overline{1,3}$;

a_{ij}^{q} – кількість заготовок j-го виду, які одержують під час розкроювання однієї одиниці вхідного матеріалу q-го виду i-им технологічним способом;

B_j – кількість одиниць вхідного матеріалу j-го виду;

M_q–запас вхідного матеріалу;

Z – кількість комплектів;

d_i^q – величина відходів від розкроювання одиниці вхідного матеріалу q-го виду i-им способом;

x_i^q – кількість одиниць вхідного матеріалу q-го виду, яку планують розкроїти i-им способом.

Математична модель зміниться відповідно до ситуації:

$$min\ D;\quad D=\sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} d^q{}_i x^q{}_i\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{m_q} x_i^q \le B_q,\quad q=\overline{1,2}\ ;$$

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} a^q{}_{ij} x^q{}_i = B_j,\quad j=\overline{1,3}\ ;$$

$$x^q{}_i \ge 0,\quad i=\overline{1,m_q}, q=\overline{1,Q}\ .$$

Приклад 2.6. Виробничі потужності п’яти заводів дають можливість на кожному з них виготовити одне із п'яти замовлень. Дані про витрати на виконання замовлень (тис. грн) представлено в таблиці 2.6.

Необхідно побудувати модель задачі про призначення з критерієм величини сумарних витрат на виконання замовлень.

Таблиця 2.6

Замовлення	Завод-виконавець				
	А	Б	В	Г	Д
1	4	7	3	7	7
2	27	8	5	6	5
3	6	2	4	21	4
4	10	8	5	6	6
5	9	5	3	20	4

Розв'язування:

Введемо систему позначень:

i – індекс виду замовлення, $i=\overline{1,5}$;

j – індекс заводу-виконавця роботи, $j=\overline{1,5}$;

C_{ij} – собівартість виконання *i*-ої роботи *j*-им виконавцем;

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо } j-\text{ий виконавець не виконує } i-\text{ої роботи}\\ 1, & \text{якщо } j-\text{ий виконавець виконує } i-\text{ту роботу}\end{cases}.$$

Математична модель задачі.

Цільова функція мінімізації сумарних витрат на виконання усіх замовлень:

$$min\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}C_{ij}x_{ij};$$

Обмеження, що кожне замовлення виконує лише один завод-виконавець :

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=1,\quad i=\overline{1,5};$$

Обмеження, що кожен завод-виконавець виконує лише одну роботу:

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1,\quad j=\overline{1,5};$$

Умова булевих змінних:

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{якщо } j-\text{ий виконавець не виконує } i-\text{ої роботи}\\ 1, & \text{якщо } j-\text{ий виконавець виконує } i-\text{ту роботу}\end{cases}$$

Умова отримання булевих змінних (таких що можуть набувати лише значення 0 або 1).

$$x_{ij}(1-x_{ij})=0, \quad i=\overline{1,5}; \quad j=\overline{1,5}\ .$$

З використанням поданої інформації модель матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
&max\ 4x_{11}+7x_{12}+11x_{13}+3x_{14}+7x_{15}+\\
&+27x_{21}+8x_{22}+5x_{23}+6x_{24}+5x_{25}+\\
&+6x_{31}+2x_{32}+4x_{33}+21x_{34}+4x_{35}+\\
&+10x_{41}+8x_{42}+5x_{43}+6x_{44}+6x_{45}+\\
&+9x_{51}+5x_{52}+3x_{53}+20x_{54}+4x_{55}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1,\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1,\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1,\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1,\\
x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1,\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1,\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1,\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1,\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1,\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1.
\end{cases}$$

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \textit{якщо } j-\textit{ий виконавець не виконує } i-\textit{ої роботи}\\ 1, & \textit{якщо } j-\textit{ий виконавець виконує } i-\textit{ту роботу}\end{cases}$$

Приклад 2.7. Необхідно скласти сплав із трьох видів металів: заліза, хрому та нікелю. Граничний вміст складової кожного виду в сплаві, а також запаси складових сплаву подано у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7

Вид	Вид складової сплаву	Ціна сплаву

сплаву	залізо	хром	нікель	
1	не менше 0,7	не менше 0,1	не менше 0,2	45
2	не більше 0,8	не більше 0,1	не більше 0,1	40
3	не менше 0,7	не менше 0,2	не менше 0,1	50
4	не більше 0,6	не більше 0,2	не більше 0,2	60
Запас, кг	100	80	80	

Завдання:

1.Запишіть економіко-математичну модель економічної ситуації.

2. Як зміниться модель задачі, якщо вважати, що запаси складових сплаву умовно необмежені, тобто в будь-який момент можна замовити необхідну кількість заліза, хрому чи нікелю. Відома також ціна складників сплаву: заліза – 10 г.о., хрому – 15 г.о., нікелю – 20 г.о.

Розв'язування:

1) Введемо систему позначень:

i – індекс виду сплаву, $i = \overline{1,4}$;

j – індекс складової сплаву, $j = \overline{1,3}$;

a'_{ij}, a''_{ij} – нижня межа та верхня межа вмісту в сплаві i-го виду складової j-го виду;

c_i – ціна одиниці сплаву i-го виду;

b_j – запаси складової j-го виду;

x_{ij} –кількість складовоїj-го виду в сплаві i-го виду.

Запишемо економіко-математичну модель задачі.

Цільова функція максимізації вартості сплаву:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_j x_{ij} \to max;$$

Обмеження на запас складових суміші:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le b_j, \quad j = \overline{1,3};$$

Обмеження на граничний вміст складових суміші:

$$a'_{ij} \le \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{3} x_{ij}} \le a''_{ij}, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,4};$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,4} .$$

З використанням поданої інформації модель матиме вигляд:

$$45(x_{11}+x_{12}+x_{13})+40(x_{21}+x_{22}+x_{23})+$$
$$+50(x_{31}+x_{32}+x_{33})+60(x_{41}+x_{42}+x_{43})\rightarrow max$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\le 100,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}\le 80,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\le 80,$$
$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\ge 0{,}7, \qquad \frac{x_{12}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\ge 0{,}2,$$
$$\frac{x_{13}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\ge 0{,}2, \qquad \frac{x_{21}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}}\le 0{,}8,$$
$$\frac{x_{22}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}}\le 0{,}1, \qquad \frac{x_{23}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}}\le 0{,}1,$$
$$\frac{x_{31}}{x_{31}+x_{32}+x_{33}}\ge 0{,}7, \qquad \frac{x_{32}}{x_{31}+x_{32}+x_{33}}\ge 0{,}2,$$
$$\frac{x_{33}}{x_{31}+x_{32}+x_{33}}\ge 0{,}1, \qquad \frac{x_{41}}{x_{41}+x_{42}+x_{43}}\le 0{,}6,$$
$$\frac{x_{42}}{x_{41}+x_{42}+x_{43}}\le 0{,}2, \qquad \frac{x_{43}}{x_{41}+x_{42}+x_{43}}\le 0{,}62,$$
$$x_{ij}\ge 0, \quad j=\overline{1,3}, \quad i=\overline{1,4}\ .$$

2) Оскільки змінились умови задачі, то виникає необхідність побудови нової моделі із новою системою позначень:

i – індекс виду сплаву, $i=\overline{1,4}$;

j – індекс складової сплаву, $j=\overline{1,3}$;

$a^{/}_{ij}$, $a^{//}_{ij}$ – нижня межа та верхня межа вмісту в сплаві i-го виду складової j-го виду відповідно;

p_i – ціна одиниці складової i-го виду;

b_j – запаси складової j-го виду;

x_{ij} –частка складовоїj-го виду в сплаві i-го виду.

Запишемо математичну модель ситуації. Цільова функція на мінімізацію собівартості суміші:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} p_j x_{ij}\rightarrow min;$$

Обмеження на суму часток складових суміші:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le 1, \quad i = \overline{1,4};$$

Обмеження на граничний вміст складових суміші:

$$a_{ij}^{/} \le x_{ij} \le a_{ij}^{//}, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,4};$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,4} .$$

З використанням поданої інформації модель матиме вигляд:

$$10(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 15(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) +$$
$$+ 20(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) \to min$$

$$x_{11} \ge 0{,}7, \qquad x_{12} \ge 0{,}1, \qquad x_{13} \ge 0{,}2,$$
$$x_{21} \le 0{,}8, \qquad x_{22} \le 0{,}1, \qquad x_{23} \le 0{,}1,$$
$$x_{31} \ge 0{,}7, \qquad x_{32} \ge 0{,}2, \qquad x_{33} \ge 0{,}1,$$
$$x_{41} \le 0{,}6, \qquad x_{42} \le 0{,}2, \qquad x_{43} \le 0{,}2,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1,$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,4} .$$

Контрольні запитання та теми для обговорення до теми № 2.

1. Сформулюйте та запишіть модель оптимального використання взаємозамінних та невзаємозамінних ресурсів на виробництві. Які ще інтерпретації цих моделей в економіці ви можете запропонувати?
2. Сформулюйте та запишіть модель оптимального розкрою матеріалів. Як отримати матрицю повноцінних варіантів розкрою?
3. Сформулюйте асортиментну задачу. Запропонуйте різні виді цільових функцій для асортиментної задачі. Як буде змінюватись система обмежень задачі при різних цільових функціях?
4. Сформулюйте та запишіть модель задачі про оптимальний склад суміші. Запропонуйте різні економічні ситуації, у яких її можна застосувати.

Тестові завдання до теми № 2:

1. Нехай i – індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$; j – індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – коефіцієнти затрат ресурсів i-го виду, які використовують у виробництві одиниці продукції j-го виду; A_i – запас ресурсу i-го виду; x_j – кількість продукції j-го виду, яку планують виробляти. Запишіть обмеження на використання ресурсів.

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le A_i, \quad i=\overline{1,m}$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le A_i, \quad i=\overline{1,m}$;

3) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \le A_i, \quad i=\overline{1,m}$;

4) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \le A_i, \quad i=\overline{1,m}$.

2. Нехай i – індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$; j – індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – коефіцієнти затрат ресурсів i-го виду, які використовують у виробництві одиниці продукції j-го виду; A_i – запас ресурсу i-го виду; x_j – кількість продукції j-го виду, яку планують виробляти; P_j – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду. Запишіть прибуток від продажу всієї продукції.

1) $P=\sum\limits_{j=1}^{n} P_j x_j$;

2) $P=\sum_{j=1}^{n} P_j x_j a_{ij}$;

3) $P=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_j x_j a_{ij}$;

4) $P=\sum_{j=1}^{n} P_j x_j A_i$

3. Нехай i – індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$; j – індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – коефіцієнти затрат ресурсів i-го виду, які використовують у виробництві одиниці продукції j-го виду; A_i – запас ресурсу i-го виду; x_j – кількість продукції j-го виду, яку планують виробляти; P_j – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду; $\underline{B}_j$, $\overline{B}_j$ – верхня і нижня межа виробництва продукції j-го виду. Скільки невідомих у моделі?

1) n;
2) n+m;
3) m;
4) n+1.

4. Нехай i – індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,m}$; j – індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – кількість одиниць ресурсу i-го виду, використаних у виготовленні одиниці j-ої продукції; A_i – запас ресурсу i-го виду; K_j – кількість одиниць продукції j-го виду, що входять в один комплект; x_j – кількість одиниць j-ої продукції, яку планують виготовити; Z – кількість комплектів. Виберіть запис умови комплектності.

1) $\frac{x_j}{K_j} \ge Z \quad j=\overline{1,n}$;

2) $\frac{a_{ij}x_j}{K_j} \ge Z \quad j=\overline{1,n}$;

3) $\frac{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j}{K_j} \ge Z \quad j=\overline{1,n}$;

4) $\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{K_j} \ge Z \quad j=\overline{1,n}$.

5. Нехай i – індекс виду ресурсу в межах певної групи, $i=\overline{1,m}$; j – індекс виду продукції, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – коефіцієнти затрат ресурсів i-го виду, які використовують у виробництві одиниці продукції j-го виду; A_i – запас ресурсу i-го виду; P_{ij} – прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду, яка вироблена з i-го виду ресурсу; x_{ij} – кількість продукції j-го виду, яку планують виробляти з i-го виду ресурсу. Який обсяг продукції всіх видів з ресурсів усіх видів виготовляють на підприємстві?

1) x_{ij};

2) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$;

3) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$;

4) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

6. Нехай i – індекс виду складника суміші, $i=\overline{1,m}$, j- індекс виду інгредієнта, $j=\overline{1,n}$, a_{ij} - вміст інгредієнта j-го виду в одиниці складника суміші i-го виду, $A_j^{\min}$ – нижня межа вмісту інгредієнта j-го виду в одиниці суміші, $A_j^{\max}$ – верхня межа вмісту інгредієнта j-го виду в одиниці суміші, P_i - собівартість одиниці складника i-го виду, x_i – частка складника i-го виду в одиниці суміші. Запишіть обмеження на вміст інгредієнта j-го виду одиниці суміші

1) $A_j^{min} \le \sum_{i=1}^{m} P_j x_i \le A_j^{max}, \quad j=\overline{1,n}$;

2) $A_j^{min} \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le A_j^{max}, \quad j=\overline{1,n}$;

3) $A_j^{max} \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le A_j^{min}, \quad j=\overline{1,n}$;

4) $A_j^{min} \le \sum_{i=1}^{m} x_i \le A_j^{max}, \quad j=\overline{1,n}$.

7. Нехай *i* – індекс варіанту розкрою, $i=\overline{1,m}$; *j* – індекс виду заготовки, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – кількість заготовок *j*-го виду, які одержують розкроюючи одну одиницю вхідного матеріалу *i*-им технологічним способом; B_j – план випуску заготовок *j*-го виду; *M* – число одиниць вхідного матеріалу; d_i – величина відходів, одержаних під час розкроювання однієї одиниці вхідного матеріалу *i*-им способом; x_i – кількість одиниць вхідного матеріалу, яку планують розкроїти *i*-им способом.

Виберіть запис обмеження на виконання виробничої програми.

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = B_j, \quad j=\overline{1,n};$

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = B_j, \quad j=\overline{1,n};$

3) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} = B_j, \quad j=\overline{1,n};$

4) $\sum\limits_{i=1}^{m} d_i x_i = B_j, \quad j=\overline{1,n}.$

8. Нехай *i* – індекс варіанту розкрою, $i=\overline{1,m}$; *j* – індекс виду заготовки, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} – кількість заготовок *j*-го виду, які одержують розкроюючи одну одиницю вхідного матеріалу *i*-им технологічним способом; B_j – план випуску заготовок *j*-го виду; *M* – число одиниць вхідного матеріалу; d_i – величина відходів, одержаних під час розкроювання однієї одиниці вхідного матеріалу *i*-им способом; x_i – кількість одиниць вхідного матеріалу, яку планують розкроїти *i*-им способом. Виберіть запис обмеження на використання вхідного матеріалу, який надходить на розкрій.

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \le M;$

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \ge M;$

3) $\sum\limits_{i=1}^{m} d_i x_i \le M;$

4) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le M.$

9. Нехай i – індекс виду роботи, $i=\overline{1,n}$; j – індекс виконавця роботи, $j=\overline{1,n}$; C_{ij} – собівартість виконання i-ої роботи j-им виконавцем;
$$x_{ij}=\begin{cases}0, & якщо\ j-ий\ виконавець\ не\ виконує\ i-ої\ роботи\\ 1, & якщо\ j-ий\ виконавець\ виконує\ i-ту\ роботу\end{cases}.$$

Необхідно так закріпити виконавців за роботами, щоб сумарна собівартість виконання всіх робіт була мінімальною. Запишіть умову, що кожну роботу може виконувати лише один виконавець.

1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ \ \forall\ i=\overline{1,n}$;

2) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ \ \forall\ j=\overline{1,n}$;

3) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\le 1,\ \ \forall\ i=\overline{1,n}$;

4) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\ge 1,\ \ \forall\ i=\overline{1,n}$

10. Нехай i – індекс виду складника суміші, $i=\overline{1,m}$, j– індекс виду інгредієнта, $j=\overline{1,n}$, a_{ij} - вміст інгредієнта j-го виду в одиниці складника суміші i-го виду, $A_j^{\min}$ – нижня межа вмісту інгредієнта j-го виду в одиниці суміші, $A_j^{\max}$ – верхня межа вмісту інгредієнта j-го виду в одиниці суміші, P_i - собівартість одиниці складника i-го виду, x_i – частка складника i-го виду в одиниці суміші. Запишіть обмеження на загальну суму часток в суміш.

1) $\sum_{i=1}^{m} x_i\ge 1$;

2) $\sum_{i=1}^{m} x_i\le 1$;

3) $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$;

4) всі відповіді правильні.