Лекція № 11

Тема 11. Математичні методи та моделі оцінювання системних характеристик підприємства: маневреність, життєздатність, надійність, ризик, напруженість, інерційність.

Навчальний час: 4год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки».

Мета і завдання лабораторного заняття: навчитись використовувати метод визначення матричної гри за допомогою лінійного програмування при оптимізації структури «валютного кошика».

Питання для перевірки базових знань за темою:

1. Поняття норми прибутку.
2. Сподівана норма прибутку.
3. Принцип максимальної невизначеності Гіббса-Джейнса.
4. Поняття матричної антагоністичної гри з нульовою сумою.
5. Метод визначення матричної гри за допомогою лінійного програмування.
6. Яким чином можна визначити, чи матриця має сідловий елемент?
7. Як скоригувати значення елементів матриці для того, щоб вони були додатними?

Завдання:

1) Нехай дано ціни валют 4 видів (амер. долара, євро, фунта стерлінгів та рос. рубля) за одну одиницю у нац. гр. од. (гривні), які спостерігалися за 12 періодів (12 міс. 2015 р., інформація про валюти представлена на основі документації валютного відділу Львівської філії АКБ «Укрсоцбанк», табл. 4);

2) обчислити значення норми прибутку $r_{ij}\,(i=1,\ldots,4;)$ у періоди $j=2,\ldots,12.$ за формулою $r_{ij}=\dfrac{f_{ij}-f_{ij-1}}{f_{ij-1}}$.

Сформувати таблицю з значеннями норм прибутків.

Скоригувати значення норм прибутків на 1 для отримання додатніх елементів матриці;

3) визначити, чи матриця R має сідловий елемент.

Для цього знайдемо мінімальні елементи у рядках матриці, а тоді максимальне з них, та максимальні у стовпцях, а тоді мінімальне з них:

$$\alpha=\max_i \alpha_i=\max_i \min_j r_{ij} \qquad \beta=\min_j \beta_j=\min_j \max_i r_{ij}$$

4) розв'язати матрицю за допомогою симплекс-методу.

Як вже зазначалося раніше, необхідно розв'язати дві задачі: одну на мінімум цільової функції, оскільки перший гравець прагне знайти такі значення p_i^*, і відповідно l_i, щоб ціна гри була максимальною, а іншу – на максимум, оскільки другий гравець прагне знайти такі значення q_j^*, і відповідно b_j щоб ціна гри була мінімальною.

Таблиця 4

Курси валют за 2015 рік відносно гривні

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Євро	9,94	9,98	9,97	9,71	9,41	9,15	9,08	10,20	10,19	10,06	10,95	10,9
Долар	8,30	8,30	8,29	8,18	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05
Рубль	0,18	0,18	0,19	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,16
Ф.стр.	11,9	11,99	11,07	11,82	11,36	11,19	11,85	11,05	11,139	11,90	11,77	11,8

Зробити наступні висновки: у якому вигляді можна записати оптимальну структуру «валютного кошика»?; у якому співвідношенні банку доцільно розподіляти свої кошти між усіма валютами?; визначити які валюти є найстабільнішими і складають основу портфеля валют; визначити максимальну норму прибутку; визначити, що є протидією для гравця отримати максимальний прибуток і у яких відсотках.

Теоретичні відомості та методичні вказівки для виконання
Математична модель задачі обрання оптимальної структури «валютного кошика»

Розглянемо наступну ситуацію. Маємо k видів іноземних валют, пронумерованих індексом $i=1,\dots,k,$ L – обсяг фінансових ресурсів у національній валюті; L_i – фінансові ресурси у національній валюті, що їх затрачено на купівлю валюти *i-го* виду $(i=1,\dots,k)$. Необхідно сформувати «валютний кошик» $x=(x_1,\dots,x_k)$, де x_1 – частка вартості кожного виду валюти $(i=1,\dots,k)$. Треба мати на увазі, що

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_k, \quad 0 \le L_i \le L \quad (i=1,\dots,k), \tag{1}$$

$$x_i = \frac{L_i}{L} \qquad (i=1,\dots,k). \tag{2}$$

Очевидно, що $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1,\ 0 \le x_i \le 1\ (i=1,\dots,k)$.

У подальших математичних виразах використовуватимуться такі позначення:

$n+1$ – кількість можливих для спостереження величин валютних курсів;

f_{ij} – можливі курси *i-го* виду валюти ($i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n$);

r_{ij} – можливі норми прибутку $i-го$ виду валюти ($i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n$);

q_j – ймовірність відповідних можливих норм прибутку ($j=1,\dots,n$);

$R = R_{k\times n} = (r_{ij})$ – функціонал оцінювання (матриця) розміром $k \times n$.

Норма прибутку визначається за формулою $r_{ij} = \dfrac{f_{ij} - f_{ij-1}}{f_{ij-1}} \cdot 100$,

($i=1,\dots,k,\quad j=1,\dots,n$), а сподівана норма прибутку може бути обчислена за формулою

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j ; \ (i = 1, \ldots, k) \tag{3}$$

Як бачимо, можна прийняти гіпотезу, що будь-які конкретні величини норми прибутку операції купівлі-продажу валют є реалізаціями випадкової величини. Дискретні випадкові величини $R_i \ (i = 1, \ldots, k)$ та $R_x = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i$ є нормами прибутку *i-го* виду валюти і «валютного кошика» $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Ця гіпотеза дає змогу використовувати для вивчення властивостей «кошика» ймовірнісно-статистичні моделі. Сподівана норма прибутку «валютного кошика» може бути обчислена за формулою

$$m_x = M(R_x) = M\left(\sum_{i=1}^{k} R_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} M(R_i) x_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j x_i \tag{4}$$

де $m_i = M(R_i)$ – сподівана норма прибутку $i-го$ виду валюти, обчислена за формулою (3).

Математична модель задачі обрання оптимальної структури «валютного кошика» має вигляд

$$m_x = M(R_x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j x_i \to \max \tag{5}$$

за системи обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \tag{7}$$

$$q_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1, n}) \tag{8}$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1, k}) \tag{9}$$

застосувавши принцип максимальної невизначеності Гіббса-Джейнса в умовах інформаційної ситуації I_4 можна визначити точкову оцінку

$$\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \ldots = \hat{q}_n = \frac{1}{n}, \tag{10}$$

підставляючи це значення у формули, отримаємо

$$\hat{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \bar{r}_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{11}$$

задачу лінійного програмування $\hat{m}_x = \sum_{i=1}^{k} \bar{r}_i x_i \to \max$ за системи обмежень (6)-(9), яка розв'язується симплекс-методом.

В умовах інформаційної ситуації I_5 (як у нашому прикладі) доцільне застосування теорії ігор щодо формування «валютного кошика». П'ята інформаційна ситуація характеризується абсолютно протилежними інтересами СПР та економічного середовища (або несхильністю суб'єкта прийняття рішення до ризику, прагненням уникнути ризику), тобто має місце конфлікт між ними, при цьому економічне середовище є активним і являє собою зловмисного противника гравця (банку). Розглянемо матричну антагоністичну (з нульовою сумою) гру двох осіб, яка має платіжну матрицю, $R = R_{k\times n} = (r_{ij})$, де r_{ij} – можливі норми прибутку i-*го* виду валюти (i = 1,...,κ, j = 1, ...,n). Якщо нижня ціна гри $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j r_{ij}$ не дорівнює верхній ціні гри $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i r_{ij}$, то оптимальним розв'язком гри є сукупність змішаних стратегій гравців, що визначаються векторами

$$P^* = (p_1^*, \ldots, p_k^*) \quad (12)$$

та

$$Q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*) \quad (13)$$

відповідно, а ціна гри

$$V = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(p_i^* q_j^* r_{ij}) \quad (14)$$

(у цій грі як перший гравець виступає СПР, банк, його клієнт та ін., як другий – валютний ринок).

Відповідно до теореми: якщо гра, яка має платіжну матрицю $R = R_{k\times n} = (r_{ij})$ не має сідлового елемента, то для інформаційної ситуації I_5 точкова оцінка вектора $Q = (q_1, K, q_n)$ є (13), розв'язок задачі (5)-(9) має вигляд (12), тобто $x_i = p_i^*$, $\max_x m_x = V$,

де V – ціна гри, обчислена за формулою (14).

Зауваження. Якщо платіжну матрицю $R = R_{k\times n} = (r_{ij})$ не можна звести до типу $k \times 2$ або $2 \times n$, то в багатьох випадках буває зручно розв'язати задачу теорії гри як задачу лінійного програмування симплексним методом, що дає змогу широко використовувати сучасні ЕОМ для побудови оптимальної структури «валютного кошика».

Рекомендована література до теми лабораторного заняття:

Основна та допоміжна література:

1. Пономаренко В. С. Моделювання поведінки інвестора на фондовому ринку : монографія / В. С. Пономаренко, О. В. Раєвнєва, К. А. Стрижиченко. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2004. – 254 с.

Інтернет ресурси:

1. Савчук В. П. Оптимізація фондового портфелю // http://www.management.com.ua/finance/fin013.html.
2. Сомик А. В. Валютний кошик як операційний орієнтир курсової політики: зарубіжний досвід та перспективи для України // http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=2556.
3. Валютний кошик // http://bibliograph.com.ua/vneshneeconomicheskie-svyazi/86.htm.

Обладнання заняття, ТЗН тощо: ноутбук, ПЕОМ.

Завдання студентам на самостійне опрацювання навчального матеріалу,

рішення задач, розв’язання вправ для підготовки до наступного лабораторного заняття.

Задача: Дано ціни валют трьох видів (американського долара, євро, фунта стерлінгів) за одну одиницю у національних грошових одиницях (гривні), які спостерігалися за минулі 12 місяців 20016 року (інформація про валюти представлена на основі документації валютного відділу Львівської філії АКБ "Райфайзенбанк"). Реалізувати задачу формування „валютного кошика” та здійснити аналіз отриманого результату.

Укладач: ____________ Васьків О. М., ст. викладач

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)