Лабораторна робота № 1

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ В УМОВАХ РИЗИКУ ТА/АБО НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета роботи: набуття практичних навичок знаходження оптимального управлінського рішення в умовах ризику та/або невизначеності з використанням критеріїв песимізму, оптимізму, Гурвіца, Лапласа, Байєса-Лапласа та Ходжа-Лемана.

Завдання. Торговельне підприємство планує продаж сезонних товарів на ринках, враховуючи можливі варіанти купівельного попиту $(П_1, П_2, П_3, П_4, П_5)$ − дуже низький, низький, середній, високий та дуже високий. На підприємстві розроблено чотири господарських стратегії продажу товарів (A_1, A_2, A_3, A_4). Товарообіг, що залежить від стратегій підприємства й купівельного попиту, представлено у вигляді платіжної матриці (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Платіжна матриця

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	180	140	k	$245-4k$	232
A_2	420	$120+10k$	140	220	100
A_3	$25+8k$	315	35	49	$10(k+23)-50$
A_4	$290-10k$	k	9	$100k-90$	201

Потрібно знайти оптимальну стратегію поведінки торговельного підприємства, використовуючи критерії песимізму, оптимізму, Гурвіца (при $\lambda = \frac{1}{k+3}$ $1 \le k \le 12$ або $\lambda = \frac{4}{k}$ $13 \le k \le 26$) Лапласа, Байєса-Лапласа ($p_1 = 0{,}1$ $p_2 = 0{,}2$ $p_3 = \lambda$ $p_4 = \lambda + 0{,}1$ $p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4$) та Ходжа-Лемана.

Теоретична частина

Для розв'язання задач такого типу використовують наступні критерії:

1. ***Критерій песимізму (критерій Вальда, найбільшої обережності)***. Оптимальною вважається чиста стратегія A_i $(i = 1,..., n)$, при якій найменший виграш $\min_j a_{ij}$ $(j = 1,..., m)$ особи, що приймає рішення, буде максимальним. Тобто вибирається така стратегія, яка забезпечує найкращий з найгірших результатів. Критерій песимізму у математично формалізованому вигляді можна представити так:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \tag{1.1}$$

де a_{ij} – оцінка, яка відповідає i-ій стратегії при j-му стані природи.

Критерій Вальда використовується в тих ситуаціях, коли обирається стратегія управління, виходячи з вимоги максимально можливого прибутку (виграшу) в найгірших умовах.

2. ***Критерій оптимізму (критерій Севіджа, правило мінімакс)*** зорієнтований на мінімізацію жалю із приводу втраченого прибутку й допускає розумний ризик заради отримання додаткового прибутку. Розрахунок критерію складається з чотирьох етапів:

- знаходять кращий результат кожної графи $\max_i a_{ij}$;
- визначають відхилення від кращого результату кожної окремої графи, тобто $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$;
- з отриманих результатів створюють матрицю ризику (жалю), тому що її елементи – це недоотриманий прибуток від невдало прийнятих рішень, допущених через помилкову оцінку можливої реакції ринку: для кожного рядка матриці жалю знаходимо максимальне значення;
- обираємо рішення, за якого максимальний жаль буде меншим, ніж за інших рішень:

$$r = \min_i \max_j r_{ij} \tag{1.2}$$

Критерій використовується тоді, коли необхідно обрати стратегію захисту об’єкта від занадто великих витрат. Використання критерію Севіджа доцільне тільки за умови достатньої фінансової стабільності підприємства, коли є впевненість, що випадковий збиток не призведе до повного краху

3. ***Критерій песимізму-оптимізму (критерій Гурвіца)***. Цей критерій рекомендує в процесі прийняття рішення використовувати певний середній результат, що характеризує стан між крайнім песимізмом і крайнім оптимізмом.

У випадку, коли гру задано матрицею виграшів за критерієм Гурвіца перевага віддається варіанту рішення, яке визначається максимумом серед лінійних комбінацій мінімального і максимального виграшів:

$$S = \max_i \left\{ \lambda \min_i a_{ij} + (1-\lambda) \max_i a_{ij} \right\}, \text{ де } 0 \le \lambda \le 1. \tag{1.3.1}$$

Коефіцієнт λ можна розглядати як показник оптимізму.

При λ = 0 критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, тобто орієнтація на граничний ризик, оскільки великий виграш спрягається з великим ризиком. При λ = 1 критерій Гурвіца співпадає з критерієм Вальда, тобто орієнтація на обережну поведінку. Тому критерій Гурвіца це називають критерієм узагальненого максиміну.

Значення λ є проміжними між ризиком і обережністю і вибирається із суб'єктивних (інтуїтивних) міркувань в залежності від конкретних умов та схильності до ризику ОПР. Чим більшого значення набуває λ, тим оптимістичніше налаштована особа, яка приймає рішення.

У випадку, коли гру задано матрицею програшів за критерієм Гурвіца перевага віддається варіанту рішення, яке визначається мінімумом серед лінійних комбінацій мінімального і максимального виграшів:

$$S = \min_i \left\{ \lambda \max_i a_{ij} + (1-\lambda) \min_i a_{ij} \right\}, \text{ де } 0 \le \lambda \le 1. \tag{1.3.2}$$

Формулу (1.3.2) застосовують також у випадку, коли задано матрицю ризиків.

Оптимальною за критерієм Гурвіца вважається чиста стратегія A_i, знайдена з умов (1.3.1) або (1.3.2).

Для пошуку оптимальної стратегії за критерієм Гурвіца рекомендують два підходи:

- знаходять рекомендовані стратегії за умов оптимізму ($0{,}1 \le \lambda \le 0{,}2$) і песимізму (відповідно $0{,}8 \le \lambda \le 0{,}9$). Якщо в обох випадках отримана одна стратегія, то вона є оптимальною. Якщо отримують дві стратегії, то на основі схильності чи несхильності гравця до ризику формується чиста (оптимістична чи песимістична) або змішана стратегія;
- розглядають варіанти крайнього оптимізму ($\lambda = 0$) і песимізму ($\lambda = 1$). Якщо розрахунки пропонують дві стратегії, то визначають момент зміни стратегій, прирівнявши вирази за ними ($\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \max_j a_{ij}$), і розв'язують рівняння щодо k.

4. ***Критерій Байєса-Лапласа***. За допомогою трьох попередніх критеріїв стратегія обиралася, виходячи з оцінки результатів станів природи і практично не враховувалися ймовірності виникнення таких станів. Критерій Лапласа передбачає розрахунки очікуваних ефектів від реалізації кожної стратегії, тобто суми можливих результатів виникнення кожного стану природи зважених на ймовірності появи кожного з них. Вибирається при цьому стратегія, яка забезпечує максимальний очікуваний ефект:

$$\beta = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} p_j a_{ij}\right) \tag{1.4}$$

де p_j – імовірність виникнення j-го стану природи.

5. ***Критерій Лапласа (***принцип недостатнього підґрунтя) дозволяє відокремити кращий варіант у тому випадку, якщо жодна з умов не має істотної переваги.

Коли немає ніяких підстав вважати, що кожний окремий стан природи більш імовірний у порівнянні з іншими, використовують припущення про те, що імовірність виникнення кожного з можливих станів оточуючого середовища однакова. Тоді оцінку середньої цінності кожної альтернативи можна обчислити за формулою звичайного середнього арифметичного всіх її можливих оцінок у різних станах природи. Оптимальною є та альтернатива, яка має найбільшу середню оцінку:

$$D = \max_i (\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}) \tag{1.5}$$

6. ***Критерій Ходжа-Лемана*** є комбінацією критеріїв Байєса-Лапласа і Вальда із параметром λ є [0; 1], що характеризує ступінь довіри ОПР до імовірнісного розподілу виникнення можливих станів природи. Оптимальною вважається стратегія, що відповідає умові:

$$\mu = \max_i [(1-\lambda) \min_j a_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^{m} p_j a_{ij}] \tag{1.6}$$

Контрольні запитання

1. Яка економічна інтерпретація критерію Байєса-Лапласа?
2. Яка економічна інтерпретація критерію Лапласа?
3. Яка економічна інтерпретація критерію песимізму?
4. Яка економічна інтерпретація критерію оптимізму?
5. Яка економічна інтерпретація коефіцієнта λ у критерії Гурвіца?

Лабораторна робота 2

Тема роботи: «Еволюційні математичні методи та моделі аналізу і прогнозування економічних змін»

Мета роботи: полягає у надання студентам знань з методології та інструментарію моделювання економічних процесів, що розвиваються в умовах перехідної економіки, з використанням основ теорії марківський процесів.

Теоретична частина:

Основи теорії марківських процесів

Марківський процес описує поведінку стохастичної системи, у якій настання чергового стану залежить тільки від безпосередньо попереднього стану системи. Якщо $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – моменти часу, то сімейство випадкових величин ξ_{t_k} буде процесом Маркова тоді і тільки тоді, коли воно володіє **марківською властивістю**

$$P\left\{\xi_{t_n} = x_n \middle| \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, \xi_{t_0} = x_0\right\} = P\left\{\xi_{t_n} = x_n \middle| \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right\} \qquad (1)$$

для всіх можливих значень випадкових величин ξ_{t_0}, ξ_{t_1}, …, ξ_{t_n}.

Ймовірність $p_{x_{n-1}, x_n} = P\left\{\xi_{t_n} = x_n \middle| \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right\}$ називається **перехідною**. Вона являє собою *умовну* ймовірність того, що система буде знаходитися у стані x_n в момент t_n, якщо в момент t_{n-1} вона знаходилася в стані x_{n-1}. Цю ймовірність називають також **однокроковою перехідною**, оскільки вона описує зміну стану системи між послідовними моментами часу t_{n-1} і t_n. Аналогічно *m*-крокова перехідна ймовірність визначається формулою

$$p_{x_n, x_{n+m}} = P\left\{\xi_{t_{n+m}} = x_{n+m} \middle| \xi_{t_n} = x_n\right\}. \qquad (2)$$

Для випадкового процесу з дискретним моментом часу система між сусідніми переходами зберігає свої стани. У зв'язку із тим, що даний процес можна представити випадковою послідовністю подій, процес називається **ланцюгом**.

Розглянемо дискретні моменти часу $\{t_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ і нехай ξ_{t_k} – випадкова величина, яка характеризує стан системи у момент t_k. Сімейство випадкових величин ξ_{t_k} утворює **стохастичний процес**. Стани в момент часу t_k, в яких може знаходитися в цей момент система, формують повну і взаємовиключаючу групу подій. Число станів системи може бути скінченним

чи нескінченним.

Ланцюги Маркова є частковим випадком марківських процесів. Ланцюги Маркова використовуються при вивченні короткотермінової і довготермінової поведінки стохастичних систем з дискретною множиною станів.

Ланцюги Маркова

Основною характеристикою марківських ланцюгів є ймовірності $p_i(k) = p(S_i(k))$, що називаються ймовірністю *i-го* стану в момент часу *k* (ймовірностями стану). Ця ймовірність характеризує ймовірність того, що система *S* від *k-го* до *k+1* кроку буде перебувати в стані *S*.

Крім ймовірностей стану існують ймовірності переходів $p_{ij}(k)$, які відображають ймовірність переходу із *i-го* стану в *j-ий* для кроку *k*.

Нехай $E_1, E_2, \ldots, E_j$ – повна і взаємовиключаюча група станів деякої системи *S* у будь-який момент часу. У вихідний момент t_0 система може знаходитися у одному з цих станів. Нехай $a_j^{(0)}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ – ймовірність того, що в момент t_0 система знаходиться у стані E_j. Припустимо також, що система, що розглядається є марківською.

Визначимо $p_{ij} = P\left\{\xi_{t_n} = j \middle| \xi_{t_{n-1}} = i\right\}$ як однокрокову ймовірність переходу системи із стану *i* в момент часу t_{n-1} у стан *j* в момент t_n і припустимо, що ці ймовірності постійні у часі. Зручніше представити ймовірності переходу із стану E_i в стан E_j в матричному вигляді

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Матриця *P* називається **однорідною матрицею переходів** (перехідних ймовірностей), оскільки всі перехідні імовірності p_{ij} фіксовані і не залежать від часу і від кроку *k*. Імовірності p_{ij} повинні задовольняти умовам

$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ для всіх } i,\ p_{ij} \geq 0 \text{ для всіх } i \text{ і } j. \qquad (4)$$

Матриця перехідних ймовірностей *P* разом з вихідними ймовірностями станів повністю визначає **ланцюг Маркова** (чи **марківський ланцюг**). Переважно вважається, що ланцюг Маркова описує перехідний режим деякої системи на однакових інтервалах часу. Але деколи інтервали часу між переходами залежать від характеристик системи і тому можуть бути

неоднаковими.

Якщо ймовірність залежить від кроку *k*, то марківський ланцюг називається неоднорідним і ймовірності переходу можна записати у вигляді наступної матриці

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nm}(k) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Сума елементів кожної стрічки матриці переходу ймовірностей рівна 1 (умова 4).

Абсолютні і перехідні імовірності

При заданих ймовірностях станів $\{a_j^{(0)}\}$ і матриці перехідних ймовірностей *P* абсолютні ймовірності станів системи після визначення кількості переходів визначаються наступним чином. Нехай $\{a_j^{(n)}\}$ – абсолютні ймовірності станів системи після *n* переходів, тобто в момент t_n. Величини $\{a_j^{(n)}\}$ можна виразити в загальному виді через $\{a_j^{(0)}\}$ і *P* за допомогою наступного співвідношення:

$$a_j^{(1)} = a_1^{(0)} p_{1j} + a_2^{(0)} p_{2j} + a_3^{(0)} p_{3j} + \ldots = \sum_i a_i^{(0)} p_{ij.} \quad (6)$$

Звідси

$$a_j^{(2)} = \sum_i a_i^{(1)} p_{ij} = \sum_i \left(\sum_k a_k^{(0)} p_{ki} \right) p_{ij} = \sum_k a_k^{(0)} \left(\sum_i p_{ki} p_{ij} \right) = \sum_k a_k^{(0)} p_{kj}^{(2)}, \quad (7)$$

де $p_{kj}^{(2)} = \sum_i p_{ki} p_{ij}$ – двокрокова ймовірність, чи перехідна ймовірність другого порядку, тобто ймовірність переходу із стану *k* в стан *j* точно за два кроки.

Подібним чином по індукції можна показати, що

$$a_j^{(n)} = \sum_i a_i^{(0)} \left(\sum_k p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \right) = \sum_i a_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}, \quad (8)$$

де $p_{ij}^{(n)}$ – *n*-крокова перехідна ймовірність (чи перехідна ймовірність *n*-го порядку), яка визначається рекурентною формулою

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}. \quad (9)$$

Задача 1: Магазин електротоварів з ціллю швидкого задоволення попиту покупців на холодильники може розміщувати замовлення на початку кожного місяця. Кожне розміщення замовлення привоздить до постійних затрат у 100 у. о. Витрати на зберігання одного холодильника на протязі місяця рівні

5 у. о. Втрати магазину при відсутності холодильників оцінюються у 150 у. о. за кожний холодильник в місяць. Місячний попит на холодильники задається наступним розподілом ймовірностей.

	Місяць		
Попит *x*	1	2	3
0	0,1+k/100	0,3-k/100	0,2+k/50
1	0,4	0,5+k/100	0,4-k/50
2	0,5-k/100	0,2	0,4

Магазин реалізує наступну стратегію: максимальний рівень запасу не повинен перевищувати двох холодильників на протязі будь-якого місяця.

Задача 2: Компанія може провести рекламну акцію за допомогою одного з трьох засобів масової інформації: радіо, телебачення чи газети. Тижневі затрати на рекламу за допомогою цих засобів оцінюються у 200+*k*, 900+*k* і 300+*k* у. о. відповідно. Компанія оцінює тижневий об'єм збуту своєї продукції по трьохбальній шкалі як задовільний (1), хороший (2) і відмінний (3). Нижче вказані перехідні імовірності, які відповідають кожному з трьох засобів масової інформації.

Радіо

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Телебачення

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Газета

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Відповідні тижневі прибутки (в тис. у. о.) рівні наступному:

Радіо

$$\begin{pmatrix} 400+k & 520+k & 600+k \\ 300 & 400 & 700 \\ 200+k & 250+k & 500+k \end{pmatrix}$$

Телебачення

$$\begin{pmatrix} 1000+k & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000+k & 1700 \\ 600 & 700 & 1100+k \end{pmatrix}$$

Газета

$$\begin{pmatrix} 400 & 530 & 710+k \\ 350 & 450 & 800+k \\ 250 & 400 & 650+k \end{pmatrix}.$$

k – номер по-порядку у журналі.

Порядок виконання роботи:

1. Визначити перехідні ймовірності при різних альтернативних розв'язках цієї задачі.
2. Визначити сподівані місячні витрати на зберігання запасу як функцію стану системи і альтернативних розв'язків.
3. Визначити оптимальну стратегію розміщення замовлень на наступні 3 місяці.
4. Знайти оптимальну стратегію реклами для наступних трьох тижнів.

Контрольні запитання:

1. Марківський процес та поняття марківської властивості.

2. Основи теорії ланцюгів Маркова. Ланцюги Маркова.
3. Марківська задача прийняття рішень.
4. Абсолютні і перехідні імовірності.
5. Однорідна матриця переходів.
6. Поняття стохастичного процесу.
7. Марківський випадковий процес.
8. Поняття однокрокової та двокрокової перехідної імовірності.

Лабораторна робота 3

Тема роботи: «Прийняття рішень із застосуванням дерева рішень»

Мета роботи: навчитись використовувати апарат теорії марківських процесів для прогнозування фінансових результатів діяльності підприємства.

Теоретична частина:

Властивості марківських процесів

У науковій літературі відмічено важливу властивість марківського процесу: для кожного моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи у майбутньому (при $t \succ t_0$) залежить тільки від її теперішнього стану (при $t = t_0$) та не залежить від того, коли та яким чином система потрапила в такий стан. У марківському випадковому процесі майбутній розвиток його залежить тільки від теперішнього стану та не залежить від «передісторії» процесу. Найважливіше значення для оцінок фінансових результатів (далі *ФР*) здобувають процеси, для яких вага всіх гілок дерева залежить від результату попереднього стану. Такі процеси називають марківськими ланцюгами. До особливих властивостей марківських процесів відносять наступні: якщо дві точки розгалуження характеризуються однаковими результатами, то незалежно від того, у якому ряді вони розташовані, гілки, що виходять з цих точок, еквівалентні; якщо $\{s_1, s_2, ...s_r\}$ – елементи множини станів системи, то ймовірності переходу P_{ij} з S_i у S_j задаються для кожної упорядкованої пари станів.

Остання властивість, для випадку оцінок *ФР*, змушує використовувати в розрахунках матриці типу:

$$P = \begin{array}{c} \\ ФР1 \\ ФР2 \\ ФР3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ФР1 & ФР2 & ФР3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \end{array} \quad (1)$$

де *ФР1* – зона одержання прибутку; *ФР2* – зона беззбитковості; *ФР3* – зона збитковості.

Для заповнення таких матриць необхідно мати набагато більше інформації, чим про процеси незалежних випробувань і значень. Тут ймовірність переходу P_{11} (із *ФР1* у *ФР1*) відноситься до норми керування, що і потрібно підтримувати в процесі господарської діяльності. Основною задачею

експертів тут є встановлення значень ймовірностей P_{ij} переходу зі стану в стан.

Крім того, необхідно задати вектор початкового стану процесу

$$P_j^0 = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}) \quad (2)$$

.

У загальному випадку, для того, щоб цілком визначити марківський ланцюг з *r* можливими станами потрібно задати квадратну стохастичну матрицю *r -го* порядку і *r-мірний* вектор початкового стану ланцюга.

Задачею прогнозування є встановлення ймовірностей знаходження підприємства в тому чи іншому фінансовому стані через декілька інтервалів часу (кроків на дереві розвитку процесу), тобто визначення вектору P_j^n :

$$P_j^n = (P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}) \quad (3)$$

.

Нехай, для прикладу, керівництво підприємства визначається з номенклатурою випуску сезонної продукції, і за окремим видом продукції підприємство розраховує на прибуток, що відповідає стану *ФР1*, однак невідомий попит на збут продукції може привести як до стану *ФР2*, так і до стану *ФР3*.

Приклад 1. Розглянемо задачу, коли для випуску обрана така продукція, яка немає конкурентів на близьку перспективу і можна вважати, що ймовірності P_{ij} матриці (1) не змінюються при переході від одного інтервалу часу до іншого.

В такому випадку для аналізу можна використати теорію однорідних марківських ланцюгів.

Нехай маємо матрицю переходів

$$P = \begin{array}{c} \\ ФР1 \\ ФР2 \\ ФР3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ФР1 & ФР2 & ФР3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array} \quad (4)$$

і вектор початкового стану

$$P^0 = (0, 1, 0) \quad (5)$$

,

тобто процес починається з фінансового стану *ФР2*, що більш всього відповідає реальності до випуску продукції.

Для розв'язку задачі можна побудувати дерево розвитку процесу для перших трьох кроків (інтервалів часу).

Порядок виконання роботи:

1. Задати матрицю переходів і вектор початкового стану.
2. Скласти ваги всіх шляхів досягнення стану $ФР_j$ і здійснити розрахунки.

3. Здійснити розрахунки шляхом операцій з матрицями.
4. Здійснити аналіз стохастичного марківського процесу.

Контрольні запитання:

1. Які процеси називають марківськими ланцюгами?
2. Від чого залежить ймовірність будь-якого стану системи у майбутньому?
3. Що відносять до особливих властивостей марківських процесів?
4. **Що потрібно задати, щоб цілком визначити марківський ланцюг з *r* можливими станами?**
5. Яким чином можна визначити вектор $P_j^{3n} = (P_1^{(3)}, P_2^{(3)}, P_3^{(3)})$ з дерева розвитку марківського процесу для трьох інтервалів часу?
6. Для чого використовують апарат теорії марківських процесів?

План лабораторного заняття № 4

Тема 4. Прийняття рішень із застосуванням дерева рішень.
Навчальний час: 6 год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки».

Мета і завдання лабораторної роботи: набути навички пошуку раціональних рішень в умовах ризику з використанням пакета MS Excel.

Завдання: визначення найкращої альтернативи в умовах ризику.
1. Побудувати дерева прийняття рішень або таблиці платежів.
2. Вибрати критерії оцінки якості рішення (наприклад, максимізація прибутку або мінімізація витрат)
3. Оцінка корисності кожного з варіантів рішень і вибір найкращого рішення.
4. Аналіз чутливості отриманого рішення.
5. Побудувати власну функцію корисності (у вигляді графіка в MS Excel). Діапазон грошових сум вибрати на свій розсуд.
6. Для порівняння, на тому ж графіку побудувати пряму, яка відображатиме нейтральне ставлення до ризику.
7. Проаналізувати отриману функцію на предмет ставлення до ризику.

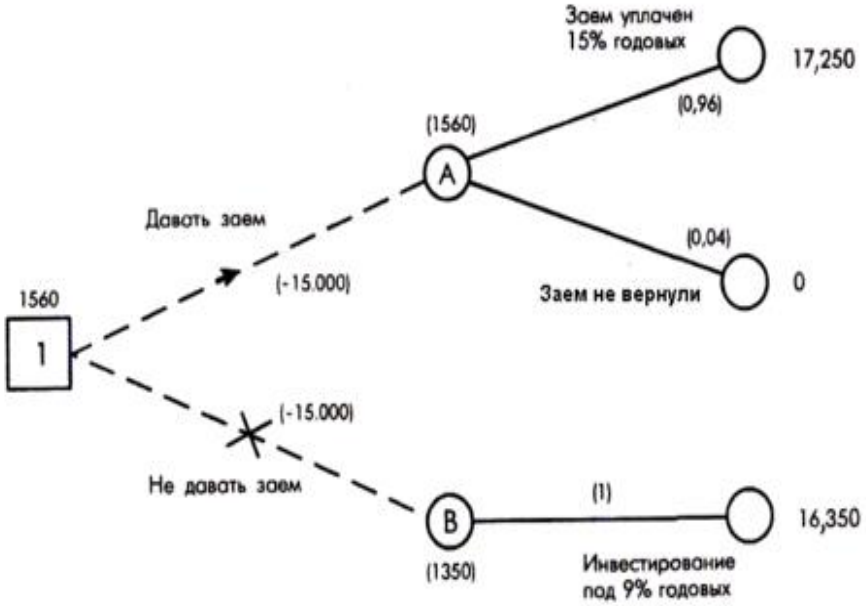
Складання звіту по лабораторній роботі, в якому представляється:
– формулювання індивідуального завдання;
– дерево прийняття рішень (таблиця платежів);
– знімки екрану монітора, що містять результати розрахунків прибутків (витрат), відповідно до «дерева» і висновки про обраний варіанті рішення;
– аналіз чутливості прийнятого рішення. Висновки за результатами аналізу;
– знімок екрана з побудованою власною функцією корисності і висновки, що стосуються власного ставлення до ризику.

Теоретичні відомості та методичні вказівки для виконання

До завдань прийняття рішень в умовах ризику, відносяться завдання, вихідні дані в яких можна описати за допомогою імовірнісних розподілів. У подібних моделях термін ризик має цілком певний сенс: розглядається кілька станів природи, і ми можемо зробити припущення про ймовірності настання кожного можливого стану природи.

Якщо рішення приймається в умовах ризику, то вартості альтернатив зазвичай описуються імовірнісними розподілами. Тобто прибуток (витрати), пов'язаний з кожним альтернативним рішенням, є випадковою величиною (повернуть або не повернуть кредит: в одному випадку ми отримаємо прибуток, в іншому – збитки). В якості критерію прийняття рішення використовується очікуване значення вартості - математичне сподівання (М). Всі альтернативи порівнюються з точки зору максимізації очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат.

Приклад 1. Для фінансування проекту бізнесмену потрібно зайняти строком на один рік 15000 дол. Банк може позичити йому ці гроші під 15% річних або вкласти в справу зі 100%-им поверненням суми, але під 9% річних. З минулого досвіду банкіру відомо, що 4% таких клієнтів позику не повертають. Що робити? Давати йому позику чи ні?



Побудова дерева рішень

– Квадратні "вузли" позначають місця, де приймається рішення (з квадрата виходять альтернативи);

– Круглі "вузли" – поява випадків (випадковий вибір стану природи).

Чисельні значення доходів (результати) прораховуються, починаючи з кінця "гілок", поступово наближаючись до вихідного питання.

Результат А1=15000+15% від 15000=17250

Результат А0=0

Результат В1=15000+9% від 15000=16350

Чистий дохід, що отримується в разі вибору альтернативи А:

М (давати позику)=(17250*0,96+0 * 0,04)-15 000=16 560-15 000=1560 дол.

Вибір альтернативи В дає:

М (не давати позику)=(16350*1,0-15 000)=1350 дол.

Оскільки очікуваний чистий дохід більше для альтернативи А, то приймаємо рішення видати позику.

Аналіз чутливості

Рішення, прийняті за допомогою «дерева», залежать від ймовірності результатів. Чутливість рішення визначається розміром змін імовірності. Вибираючи рішення, ми повинні знати, наскільки воно залежить від змін ймовірностей, і, отже, наскільки можна покладатися на цей вибір.

Проаналізуємо чутливість у щойно розглянутому прикладі. Очікувані чисті доходи в «вузлах» А і В досить близькі: 1560 і 1350 дол. Вибір рішення залежить від значення ймовірностей. Аналіз чутливості дозволяє нам обчислити «розкид» ймовірностей, які змінюють наш вибір.

Позначимо ймовірність «неповернення» позики через p. Тоді варіант А дає чистий дохід: $17250*(1-p)+0*p-15000=17250-17250*p$.

Варіант В дає чистий дохід 1350 дол. Врівноваження цих результатів дає:

$2250-17250*p=1350=>p=900/17250=0,052$.

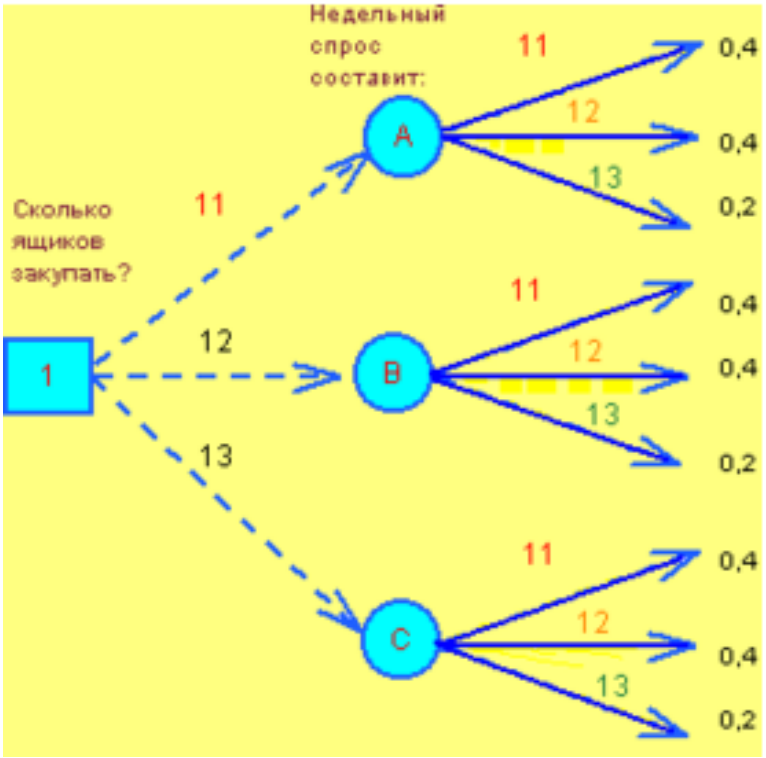
Оскільки результат $p\approx0,05$ виявився близький до $p\approx0,04$, це показує, що вибір рішення дуже чутливий до розрахунків величини ймовірності, і найменша помилка може призвести до зміни вибору. Що показує важливість аналізу чутливості в процесі прийняття рішень.

Приклад 2. Посередницька фірма щотижнево закуповує та розповсюджує хімічні реактиви для фотолабораторій. Вартість закупівлі шухляди становить 50 дол., прибуток від продажу шухляди – 80 дол. Статистика дослідження попиту наведена в таблиці.

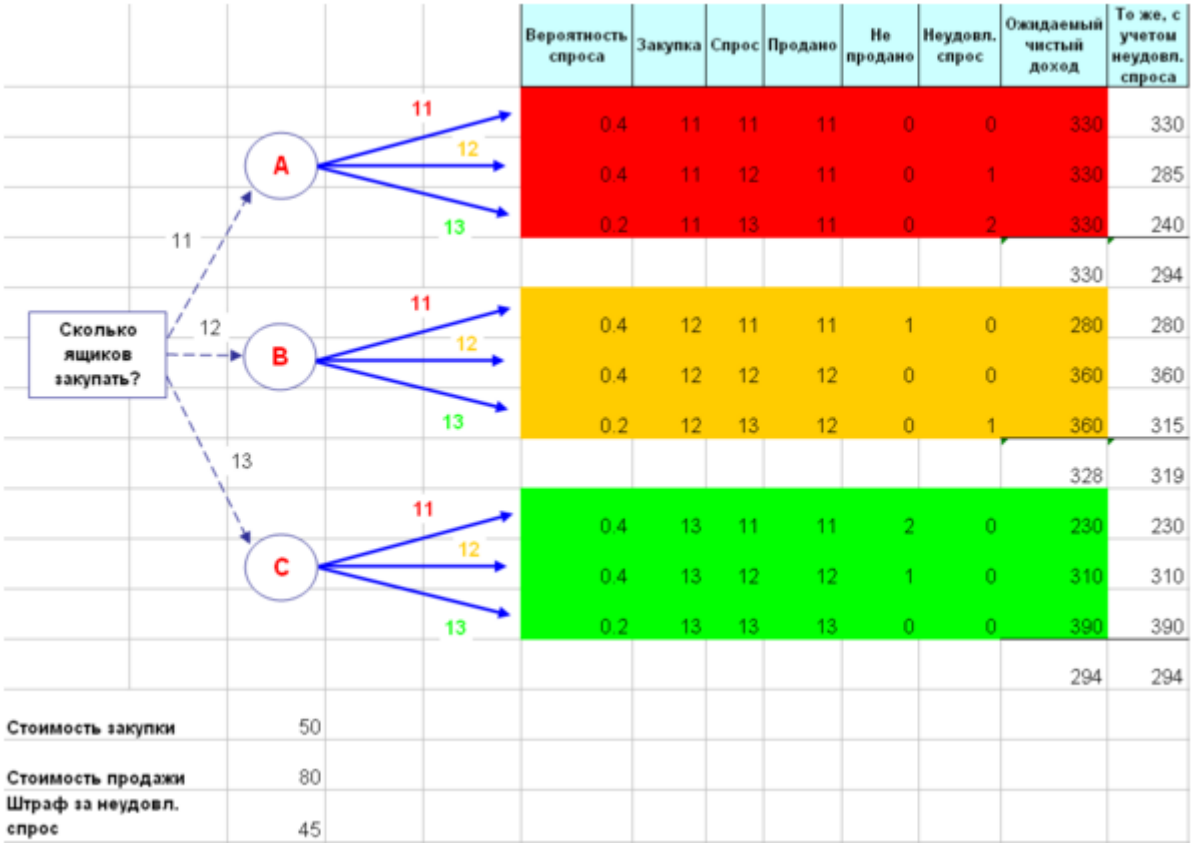
Тижневий попит, шухляд	Ймовірність
11	0,4
12	0,4
13	0,2

Якщо закуплена шухляда залишилася непроданою, фірма несе збиток 50 доларів. Визначити розмір запасу, який доцільно створити фірмі. Чи зміниться рішення, якщо незадоволений попит клієнта буде оцінений в 45 доларів?

Дерево рішень має вигляд



Підсумкова таблиця рішення задачі має вигляд



Вероятность спроса	Закупка	Спрос	Продано	Не продано	Неудовл. спрос	Ожидаемый чистый доход	То же, с учетом неудовл. спроса
0.4	11	11	11	0	0	330	330
0.4	11	12	11	0	1	330	285
0.2	11	13	11	0	2	330	240
						330	294
0.4	12	11	11	1	0	280	280
0.4	12	12	12	0	0	360	360
0.2	12	13	12	0	1	360	315
						328	319
0.4	13	11	11	2	0	230	230
0.4	13	12	12	1	0	310	310
0.2	13	13	13	0	0	390	390
						294	294

Очікуваний чистий дохід максимальний при виборі альтернативи А (330 дол.). З урахуванням штрафів за незадоволений попит максимальний чистий дохід дає альтернатива В (319 дол.).

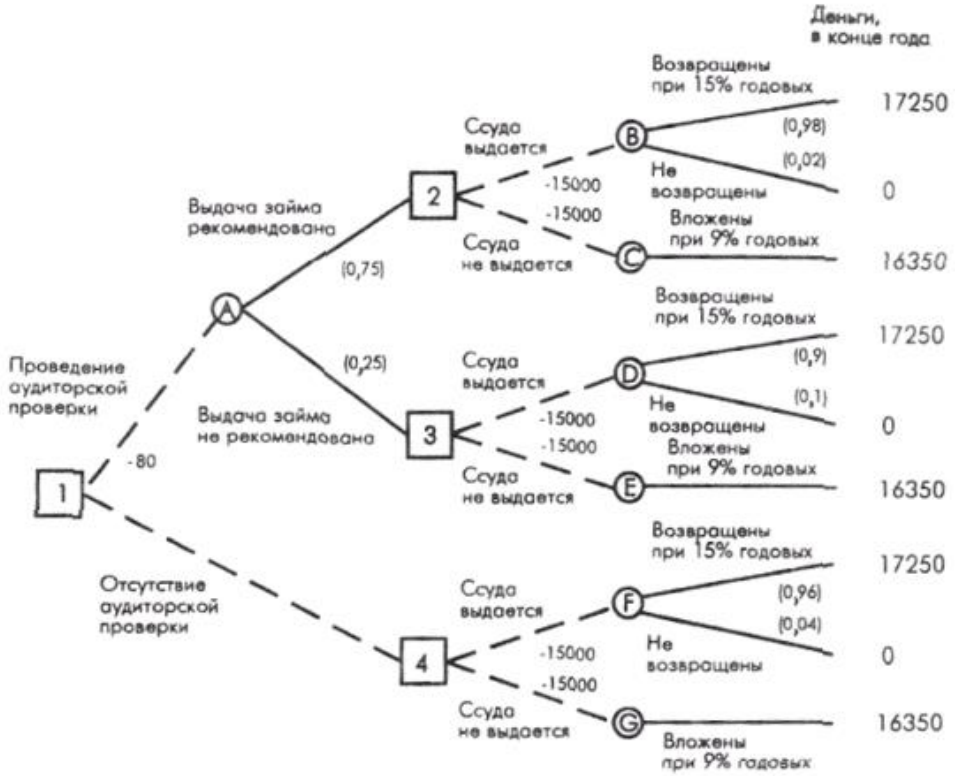
Приклад 3. Банк вирішує питання, чи перевіряти конкурентоспроможність клієнта, перед тим, як видавати позичку. Аудиторська фірма бере з банку 80 дол. за перевірку. В результаті цього перед банком постають дві проблеми: перша проводити чи ні перевірку, друга – видавати після цього позичку чи ні.

Вирішуючи першу проблему, банк перевіряє правильність виданих аудиторською фірмою відомостей. Для цього вибираються 1000 чоловік, які були перевірені і яким згодом видавалися позички.

Рекомендації аудиторської фірми і повернення позички

Рекомендації після перевірки кредитоспроможності	Фактичний результат		Всього
	Клієнт позичку повернув	Клієнт позичку не повернув	
Давати позичку	735	15	750
Не давати позичку	225	25	250
Всього	960	40	1000

Етап. 1. Будуємо дерево рішень.



Етап 2. Використовуючи дані таблиці, обчислимо ймовірності кожного результату:

– P (клієнт позику поверне; фірма рекомендувала)=735/750=0,98;
– P (клієнт позику не поверне; фірма рекомендувала)=15/750=0,02;
– P (клієнт позику поверне; фірма не рекомендувала)=225/250=0,9;
– P (клієнт позику не поверне; фірма не рекомендувала)=25/250=0,1.

Етап 3. Зліва направо проставимо грошові результати кожного з «вузлів», використовуючи результати, обчислені раніше. Будь-які витрати, що зустрічаються віднімаємо з очікуваних доходів. Таким чином підраховуємо все «дерево». Після того, як пройдені квадрати «рішень», вибирається «гілка», що веде до найбільшого з можливих при даному рішенні очікуваному доходу.

Спочатку подивимося на кола фіналів B і C, що є наслідком квадрата 2 (чи видавати позичку клієнтові). Дохід, очікуваний від результату B: M(B)=17250 дол.×0,98+0×0,02=16905 дол.; чистий очікуваний дохід: NM(B)=16905-15000=1905 дол.

Дохід, очікуваний від результату C: M(C)=16350 дол.×1,0=16350 дол.; чистий очікуваний доход: NM(C)=16350-15000=1350 ф. ст.

Припустимо, що ми зараз в квадраті 2. Максимальний очікуваний дохід 1905 дол. досягається в колі B, тому приймаємо рішення видати позику.

Прийнявши рішення, коригуємо «дерево», проставивши чистий очікуваний дохід 1905 дол. над квадратом 2. «Гілка» «не давати позику» закреслюється.

Те ж саме робимо з колами результатів D і E. Дохід, очікуваний від результату D: M(D)=(17250 дол.×0,9)+(0×0,1)=15525 дол.; чистий очікуваний дохід: NM(D)=15525-15000=525 дол.

Аналогічно для результату E: M(E)=16350 дол.×1,0=16350 дол.; чистий очікуваний доход: NM (E)=16350-15000=1350 дол.

Якщо б ми були в квадраті 3, то максимальний очікуваний дохід дорівнював би 1350 дол., і можна було б прийняти рішення не видавати позику.

Нарешті приступаємо до розрахунку кіл результатів F і G, які є результатами рішення 4.

M (F)=17250 дол.×0,96+0x0,04=16560 дол.;

NM (F)-16560-15000=1560 дол.;

M (G)=16350 дол.×1,0=16350 дол.;

NM (G)=16350-15000=1350 дол.

У квадраті 4 максимальний очікуваний чистий дохід становить 1560 дол., і тому приймаємо рішення видати клієнту позику. Сума 1560 дол. надписується над квадратом 4, а альтернативна «гілка» перекреслюється.

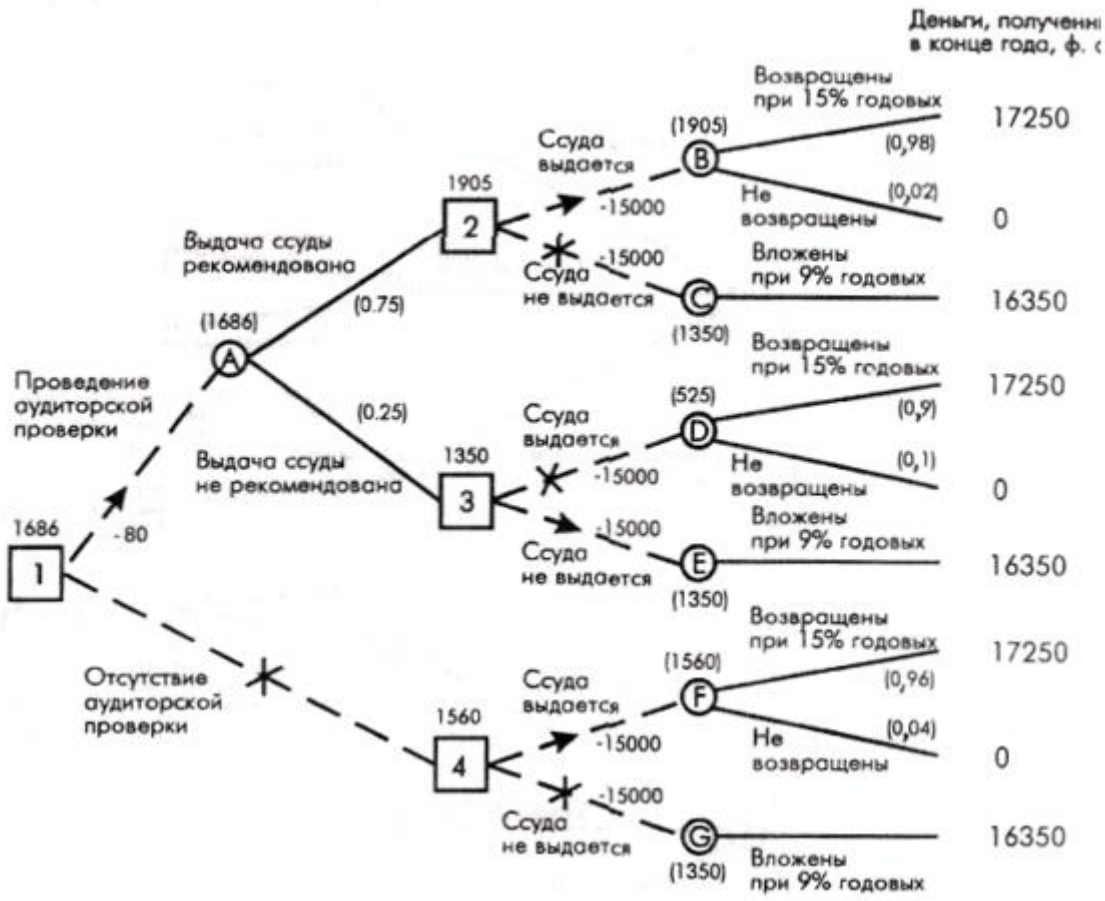
Тепер повернемося до «вузлів» А та 1. Використовуючи очікувані чисті доходи над квадратами 2 і 3, розрахуємо математичне сподівання для комірки А:

M(A)=(1905 дол.×0,75)+(1350 дол.×0,25)=1766 дол.

Оскільки аудиторська перевірка коштує 80 дол., очікуваний чистий дохід складе: NM(A)=1766-80=1686 дол.

Тепер можна проставити значення першого рішення квадрата 1. Чи повинен банк скористатися аудиторською перевіркою? У цьому «вузлі» максимальне математичне сподівання-1686 дол., тому перекреслюємо альтернативну «гілку».

На наступному рисунку стрілками показана послідовність рішень, що веде до максимального чистого доходу: в квадраті 1 скористаємося аудиторською перевіркою. Якщо видача позички рекомендується фірмою, тоді в квадраті 2 – видати позику, якщо не рекомендується, то в квадраті 3 – не видавати позику, а інвестувати ці гроші під стабільні 9% річних.



План лабораторного заняття № 5

Тема 8. Математичні моделі антикризового індикативного планування методами аналізу ієрархій.
Навчальний час: 6 год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки», «Системи приняття рішень», «Прогнозування соціально-економічних процесів».

Мета і завдання лабораторного заняття: навчитись формувати матрицю попарних порівнянь та визначати альтернативи забезпечення кредиту та відносну важливість кожного з критеріїв.

Питання для перевірки базових знань за темою лабораторного заняття:

1. Метод аналізу ієрархій.
2. Математичні моделі антикризового індикативного планування на базі методу аналізуі єрархій.
3. Поняття вектора вагових коефіцієнтів.
4. Максимальне власне значення матриці попарних порівнянь.
5. Відносна оцінка узгодженості ієрархії.
6. При яких значеннях узгодженість ієрархії вважається допустимою?
7. Чому рівна величини $\lambda_{\max}^{i,j}$?

Завдання:

1. Сформувати матрицю критеріїв альтернативних рішень.
2. Сформувати матрицю попарних порівнянь і розрахувати вагові коефіцієнти, максимальне значення цих коефіцієнтів, оцінку узгодженості суджень, відносну оцінку узгодженості суджень.
3. Порівняти отримані результати із нормативними та зробити висновки.

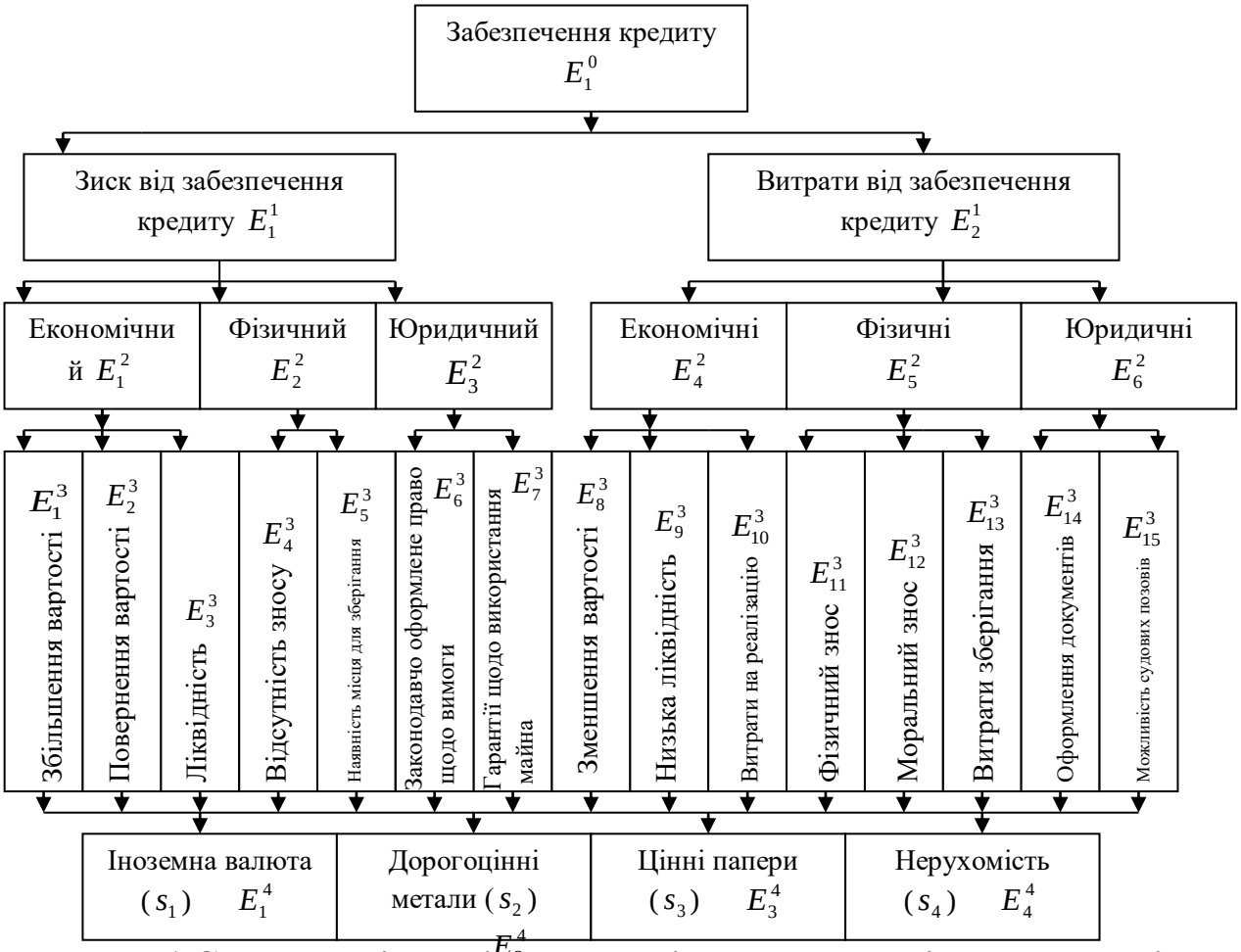


Рис. 1.Структура ієрархічної моделі оптимальності прийняття рішень

Для моделювання діяльності банківської установи при виборі методу найбільш надійного забезпечення кредиту, коли необхідно враховувати якісні характеристики альтернатив, при прийнятті рішень необхідно формалізувати задачу і врахувати ваговий вплив характеристик на оптимальність вибору рішення. Ставлячи питання щодо того, який із критеріїв є більш важливим для досягнення мети, або яка з альтернатив якнайкраще відповідає необхідному критерію, для визначення ступеня переваги одного елемента ієрархії над іншим, формується матриця попарних порівнянь. Матриця має наступний вигляд:

$$C_0 = \begin{pmatrix} & K^1 & \dots & K^m & \dots & K^h \\ K^1 & & & & & \\ \dots & & & & & \\ K^n & & & C^{mn} & & \\ \dots & & & & & \\ K^h & & & & & \end{pmatrix}$$

де h – кількість критеріїв.

На рис. 1 на *0-му* та *1-му* рівнях ієрархії розміщено цілі, яких хоче досягнути особа, що приймає рішення; на *2-му* рівні – основні чинники, що визначають зиск і збитки; на *3-му* рівні – критерії якості, що характеризують зиск і витрати, які можуть мати місце після надання кредиту; *на 4-му* рівні – елементи множини альтернативних рішень експерта (застави).

Теоретичні відомості та методичні вказівки для виконання Покроковий розв’язок задачі антикризового

індикативного планування

Крок 1. Здійснюємо декомпозиція цілі в ієрархію.
Крок 2. Формуємо матриця, елементами якої є числа, що показують відносну важливість кожного критерію відносно всіх інших.
Крок 3. Після побудови ієрархічної моделі і складання матриць попарних порівнянь проводимо ієрархічний синтез. Якщо в якості елементів вектора пріоритету використовувати середньогеометричні елементи рядків матриці A_j^i, тобто величини

$$g_k^{i,j} = \sqrt[n_{i+1}]{\prod_{l=1}^{n_{i+1}} a_{kl}^{i,j}}, \quad k = 1,...,n_{i+1}, \tag{1}$$

то елементи вектора вагових коефіцієнтів пріоритету U_j^i обчислюємо за формулою

$$u_k^{i,j} = \frac{g_k^{i,j}}{\sum_{s=1}^{n_{i+1}} g_s^{i,j}}. \tag{2}$$

Крок 4. Оцінюємо однорідність суджень експертів.

В якості оцінки узгодженості суджень експерта у розрізі матриці порівнянь A_j^i використовумо індекс

$$IYC_j^i = (\lambda_{\max}^{i,j} - n_{i+1})/(n_{i+1} - 1), \tag{3}$$

де IYC_j^i – індекс узгодженості суджень;

$\lambda_{\max}^{i,j}$ – максимальне власне значення матриці попарних порівнянь A_j^i.

У випадку, коли безпосереднє обчислення величини $\lambda_{\max}^{i,j}$ спричинює певні труднощі, можна скористатися наближеним методом, що складається з двох послідовних кроків.

Крок 1. Для кожного стовпчика матриці попарних порівнянь знаходиться сума його елементів

$$s_l^{i,j} = \sum_{k=1}^{n_{i+1}} a_{kl}^{i,j}, \quad l = 1,...,n_{i+1}; \tag{4}$$

із цих сум утворюється вектор-рядок

$$S_j^i = \left(s_l^{i,j} : \quad l = 1,\ldots,n_{i+1}\right). \tag{5}$$

Крок 2. Величина $\lambda_{\max}^{i,j}$ покладається рівною добутку векторів S_j^i та U_j^i, тобто

$$\lambda_{\max}^{i,j} = S_j^i U_j^i = \sum_{l=1}^{n_{i+1}} \left(s_l^{i,j} u_l^{i,j}\right).. \tag{6}$$

Використовується також *відносна оцінка узгодженості суджень*

$$ВУС_j^i = {IУС_j^i}\Big/{M(IУС)}, \tag{7}$$

У табл. 1 наведені значення $M(IУС)$ залежно від порядку матриці.

Таблиця 1

Нормативні значення індексу узгодженості суджень

Порядок матриці, *n*	Нормативне значення, *M(IУС)*	Порядок матриці, *n*	Нормативне значення, *M(IУС)*	Порядок матриці, *n*	Нормативне значення, *M(IУС)*
1	0,00	6	1,24	11	1,51
2	0,00	7	1,32	12	1,54

3	0,58	8	1,41	13	1,56
4	0,90	9	1,45	14	1,57
5	0,12	10	1,49	15	1,59

В якості допустимого використовується значення $ВУС^{доп} \le 0{,}1$ (у деяких випадках використовуються $ВУС^{доп} \le 0{,}2$).

Якщо для матриць A_j^i, що відповідають елементам E_j^i i-*го* рівня ієрархії ($i = 0{,}1{,}\ldots, L-1$), визначено індекси узгодженості суджень $ИУС_j^i$ ($j = 1{,}\ldots, n_i$) і з цих індексів утворено вектори-рядки

$$ИУС^i = (ИУС_j^i : \quad j = 1{,}\ldots, n_i). \tag{8}$$

то індекс узгодженості (*ИУІ*) повної домінантної ієрархії (що має *L* рівнів) визначається за формулою

$$ИУІ = ИУС^0 + ИУС^1 U^0 + ИУС^2 U^1 U^0 + \ldots + ИУС^{L-1} U^{L-2} \ldots U^1 U^0. \tag{9}$$

Узгодженість ієрархії можна оцінювати також і на основі відносної оцінки

$$ВУІ = ИУІ / M(ИУІ), \tag{10}$$

де *ВУІ* – відносна оцінка узгодженості ієрархії;
М(ИУІ) – нормативне значення індексу узгодженості ієрархії. Для повної домінантної ієрархії *М(ИУІ)* обчислюється за формулою

$$M(ИУІ) = M(ИУС^0) + M(ИУС^1) U^0 + \ldots + M(ИУС^{L-1}) U^{L-2} \cdot U^1 U^0; \tag{11}$$

$$M(ИУС^i) = (M(ИУС_j^i) : \quad j = 1{,}\ldots, n_i). \tag{12}$$

Узгодженість ієрархії вважається допустимою, якщо $ВУІ \le 0{,}1$ (іноді допускається $ВУІ \le 0{,}2$).

Приклад 1. При заповненні матриці варто починати з лівого елемента і ставити запитання: на скільки він є важливішим за елемент вгорі? При порівнянні елемента із самим собою відношення дорівнює одиниці. Якщо перший елемент є важливішим за другий, то використовується обране число із шкали (табл. 2), у протилежному випадку використовується обернена величина. У будь-якому випадку зворотні один одному відношення заносяться в симетричні позиції матриці, отже, $\nu_{ij} = \dfrac{1}{\nu_{ji}}$. Після побудови ієрархічної моделі і складання матриць попарних порівнянь проводиться ієрархічний синтез. Сутність цього етапу полягає у побудові вектора рейтингових оцінок альтернативних рішень (стратегій) шляхом синтезу векторів пріоритету матриць попарних порівнянь часткових цілей, критеріїв тощо. Вектори пріоритету можна обчислити в такі способи: як головний власний вектор матриці; як середньогеометричне елементів рядків матриці (окремо для кожного рядка); іншими методами.

Таблиця 2

Шкала відносної важливості (інтенсивність відносної важливості)

Інтенсивність (вага) відносної важливості	Якісна оцінка	Пояснення
1	Однаково важливі	Обидва елементи роблять однаковий внесок щодо досягнення кінцевої цілі

3	Не набагато важливіший	Існують висловлювання відносно пріоритету одного елемента щодо іншого, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливий	Існують достатньо переконливі докази та логічні критерії, що один з елементів є важливішим (вагомішим)
7	Значно важливіший	Існують переконливі докази великої значущості одного елемента порівняно з іншим
9	Абсолютно важливіший	Усвідомлення пріоритету одного елемента щодо іншого максимально підтверджується
2, 4, 6, 8	Проміжні оцінки між двома сусідніми судженнями	Потрібен певний компроміс
$\frac{1}{\nu};\ \nu = 1,...,9$	Обернені значення ненульових оцінок	Якщо елементу E_1 при порівнянні з елементом E_2 надається одна з ненульових інтенсивностей, то елементу E_2 при порівнянні з E_1 надається обернене значення цієї інтенсивності
0	Непорівняльність	Немає сенсу в порівнюванні елементів

З групи матриць парних порівнянь (табл. 3) формується набір локальних пріоритетів, що виражають відносний вплив множини елементів на елемент рівня, що примикає зверху. Для цього обчислюємо максимальні власні значення – $\lambda_{\max}^{i,j}$ і власні вектори для кожної з матриць.

Таким чином, ми можемо визначити не тільки порядок пріоритетів кожного окремого елемента, але й значення (табл. 3).

Таблиця 3

Матриці попарних порівнянь альтернатив з ваговими коефіцієнтами та максимальними власними значеннями

	s_1	s_2	s_3	s_4	g_k^{ij}	u_k^{ij}	$\lambda_{\max}$
s_1	1	3	2	4	1,89	1/5	4 5/6
s_2	1/3	1	2/3	1 1/3	0,78	1/4	
s_3	1/2	1 1/2	1	2	1,08	2/9	
s_4	1/4	3/4	1/2	1	0,62	1/4	
сума	2	6 1/4	4 1/6	8 1/3			
	s_1	s_2	s_3	s_4	g_k^{ij}	u_k^{ij}	$\lambda_{\max}$
s_1	1	4	3	5	2,27	1/6	5 1/5
s_2	1/4	1	1/2	1 1/4	0,69	2/9	
s_3	1/3	1 1/3	1	1 2/3	0,94	2/9	
s_4	1/5	4/5	3/5	1	0,63	1/4	
сума	1 7/9	7 1/8	5	9			
	s_1	s_2	s_3	s_4	g_k^{ij}	u_k^{ij}	$\lambda_{\max}$
s_1	1	2	3	4	1,89	1/5	
s_2	1/2	1	1	2	1,00	2/9	

s_3	1/3	2/3	1	1 1/3	0,78	1/4	4 3/4
s_4	1/4	1/2	3/4	1	0,62	1/4	
сума	2	4 1/6	5 3/4	8 1/3			

Із матриць попарних порівнянь розраховуються наступні величини: максимальне власне значення матриці попарних порівнянь A_j^i – $\lambda_{\max}$, індекс узгодженості суджень – *ІУС* та відносна узгодженість суджень експерта відповідно до матриці попарних порівнянь A_j^i – *ВУС* та їх розраховане значення порівнюється із нормативним значенням (математичним сподіванням, табл. 1). Якщо ж для матриці попарних порівнянь A_j^i $ВУС_j^i$ перевищує задану норму (0,1 чи 0,2), то це вказує на те, що заповнення матриці попарних порівнянь здійснювалось із суттєвими порушеннями щодо логічних суджень. А тому експертові пропонується перевірити свої судження, а то й заново структурувати задачу.

Задача 1: Комерційний банк вивчає питання надання кредиту одному зі своїх клієнтів. Клієнт пропонує альтернативні варіанти щодо застави, а саме: s_1 – іноземна валюта; s_2 – дорогоцінні метали; s_3 – цінні папери; s_4 – нерухомість (структуру ієрархічної моделі, що впорядковує цілі, чинники, критерії якості і визначає загальний зиск наведено на рис. 1) – її узгодили між собою експерти та СПР)). Визначити найбільш надійну заставу кредиту за допомогою методу аналізу ієрархій.

Форми контролю знань – презентація виконаних завдань у вигляді розв'язаних, за допомогою програми пакету MS Office, задач, обговорення виконаних завдань.

Рекомендована література до теми лабораторного заняття:

Основна та допоміжна література:

1. Євстрат Д. І. Застосування методу аналізу ієрархій для оцінки маркетингової активності торговельних підприємств / Д. І. Євстрат, Ю. І. Кушнерук // Проблеми економіки. – 2012. – №2. – С. 66-71.
2. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel: Навч. посібник / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов – К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.
3. Панкратова Н. Д. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій / Н. Д. Панкратова, Н. І. Недашківська // Системні дослідження та інформаційні технології: міжнародний науково-технічний журнал. – 2006. – №4. – 2006. – С. 7-25.
4. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. / Т. Саати, К. Керис – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.

Інтернет ресурси:

1. Метод аналізу ієрархій як інструмент для прийняття рішень при стратегічному плануванні [Електроний ресурс] – Режим доступу: http://pidruchniki.com/15660721/menedzhment/metod_analizu_iyerarhiy_instrument_dlya_priynyattya_rishen_pri_strategichnomu_planuvanni.
2. Метод аналізу ієрархій Т. Сааті [Електроний ресурс] – Режим доступу: http://stud.com.ua/25063/menedzhment/metod_analizu_iyerarhiy_saati.

3. http://www.problecon.com/export_pdf/problems-of-economy-2012-2_0-pages-66_71.pdf.

Обладнання заняття, ТЗН тощо: ноутбук, ПЕОМ.

Завдання студентам на самостійне опрацювання навчального матеріалу, рішення задач, розв'язання вправ для підготовки до наступного лабораторного заняття.

Задача: Комерційний банк вивчає питання надання кредиту одному зі своїх клієнтів. Клієнт пропонує альтернативні варіанти щодо застави, а саме: s_1 - автомобіль; s_2 - власний бізнес; s_3 - нерухомість. Визначити найбільш надійну заставу кредиту за допомогою методу аналізу ієрархій.

Укладач: _____ Васьків О. М., ст. викладач
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

План лабораторного заняття № 6

Тема 9. Математичні методи і моделі аналізу процесів інноваційного розвитку підприємства.

Навчальний час: 3 год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки», «Системи прийняття рішень».

Мета і завдання лабораторного заняття: навчитись застосовувати методи математичного моделювання в управлінні інноваційним розвитком економічних систем з урахуванням необхідності його інвестиційного забезпечення.

Питання для перевірки базових знань за темою лабораторного заняття:

1. Які існують методи і моделі управління інноваційним розвитком економічної системи?
2. Які існують моделі визначення характеристик інвестиційного портфеля?
3. В чому полягає застосування моделі Квазі-Шарпа?
4. Що таке прибутковість портфеля цінних паперів?
5. За якою формулою визначається ризик портфеля цінних паперів?
6. Як записується формула для визначення прибутковості одиничного портфеля в період t?
7. За якою формулою розраховується коефіцієнт β цінного папера?

Завдання:

1. Сформулювати модель Квазі-Шарпа для прибутковості портфеля цінних паперів.
2. Розрахувати дисперсію та коваріацію, які є оцінками ризику.
3. Розрахувати значення оптимального портфеля.
4. Розрахувати прибутковість одиничного портфеля в період t.
5. Розрахувати середню прибутковість цінного папера за минулі періоди.
6. Розрахувати середню прибутковість одиничного портфеля за минулі періоди.
7. Порахувати коефіцієнт β цінного папера.
8. Порахувати показник ризику одиничного портфеля.
9. Здійснити розрахунок залишкового ризику, який є мірою розкиду прибутковості цінного паперу.
10. Розрахувати частки акцій в інвестиційному портфелі.

Моделі визначення характеристик інвестиційного портфеля

Відомі моделі визначення характеристик інвестиційного портфеля модель Марковіца та модель Шарпа успішно працюють на відносно стабільних західних фондових ринках.

Процес управління з використанням моделі можна розглядати як метод пошуку найкращих рішень для аналізу поводження реальної виробничої системи.

В умовах нестабільності вітчизняного фондового ринку, домінуючого впливу

сировинних галузей на загальну динаміку розвитку економіки, недосконалості нормативно-правової бази для оптимізації інвестиційного портфеля доцільно використати модель Квазі-Шарпа.

Модель Квазі-Шарпа заснована на взаємозв'язку прибутковості кожного цінного папера з деякого набору *N* цінних паперів із прибутковістю одиничного портфеля із цих цінних паперів. За моделлю Квазі-Шарпа прибутковість цінного папера пов'язується із прибутковістю одиничного портфеля функцією лінійної регресії виду:

$$R_i = \bar{R}_i + \beta_i \cdot \left(R_{sp} - \bar{R}_{sp} \right) \qquad (1)$$

де R_i – прибутковість цінного паперу;

R_{sp} – прибутковість одиничного портфеля;

β_i – коефіцієнт регресії;

$\bar{R}_i$ – середня прибутковість цінного паперу за минулі роки;

$\bar{R}_{sp}$ – середня прибутковість одиничного портфеля за минулі періоди.

Коефіцієнт β характеризує ступінь залежності прибутковості цінного папера від прибутковості одиничного портфеля. Чим вище β тим сильніше залежить прибутковість цінного папера від змін прибутковості одиничного портфеля, тобто від змін прибутковості інших цінних паперів, які входять до одиничного портфелю. Коефіцієнт β називають β-ризиком, але його трактування відрізняється від трактування однойменного показника в моделі Шарпа.

Загальний ризик вкладень у даний цінний папір складається з β-ризику, тобто ризику зниження прибутковості при падінні прибутковості одиничного портфеля, і залишкового ризику σ_{ri}, тобто ризику зниження прибутковості і невідповідності лінії регресії.

У моделі Квазі-Шарпа ризик цінного паперу являє собою сукупність коефіцієнта бета і залишкового ризику (σ_{ri}). Залишковим ризиком називають ступінь розкиду значень прибутковості цінного паперу щодо лінії регресії.

Прибутковість в моделі Квазі-Шарпа розраховується як:

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{R}_i \cdot W_i \right) + \left(R_{sp} - \bar{R}_{sp} \right) \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\beta_i \cdot W_i \right), \qquad (2)$$

де R_{sp} – очікувана прибутковість одиничного портфеля.

Ризик портфеля цінних паперів визначається по формулі:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\beta_i \cdot W_i \right)^2 \cdot \sigma_{sp}^{\ 2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma_{\varepsilon i}^2 \cdot W_i^{\ 2} \right)}, \qquad (3)$$

де σ_{sp} – показник ризику одиничного портфеля.

З використанням моделі Квазі-Шарпа для розрахунку характеристик портфеля пряма задача має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\left(\bar{R}_i \cdot W_i\right)+\left(R_{sp}-\bar{R}_{sp}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right)\to \max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right)^2 \cdot \sigma_{sp}^2+\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^{\,2}\right)}\le \sigma_{req}; \\ W_i \ge 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Обернена задача записується аналогічно:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\left(\bar{R}_i \cdot W_i\right)+\left(R_{sp}-\bar{R}_{sp}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right)\ge R_{reg}; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\beta_i \cdot W_i\right)^2 \cdot \sigma_{sp}^2+\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{ri}^2 \cdot W_i^{\,2}\right)}\to \min; \\ W_i \ge 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

При практичній реалізації моделі Квазі-Шарпа для оптимізації інвестиційного портфеля використовуються такі формули:

1) як прибутковість одиничного портфеля в період *t* приймається середнє значення прибутковості цінних паперів, його складових, за цей же період:

$$R_{sp}^t = \frac{\sum_{i=1}^{N} R_i^t}{N}, \qquad (6)$$

де R_{sp}^t – прибутковість одиничного портфеля в період *t;* R_i^t – прибутковість *і-го* цінного паперу за період *t;*

2) середня прибутковість цінного паперу за минулі періоди:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_i^t}{T}, \qquad (7)$$

де R_i^t – прибутковість цінного папера за період *t*; T – розглянута кількість періодів часу;

3) середня прибутковість одиничного портфеля за минулі періоди:

$$\bar{R}_{sp} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{sp}^t}{T}; \qquad (8)$$

4) коефіцієнт β цінного папера розраховується за формулою:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left[\left(R_i^t-\bar{R}_i\right)\cdot\left(R_{sp}^t-\bar{R}_{sp}\right)\right]}{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{sp}^t-\bar{R}_{sp}\right)^2}; \qquad (9)$$

5) залишковий ризик цінного папера:

$$\sigma_{ri} = \frac{\sum_{i=1}^{T}\left(R_i^t-\bar{R}_i-\beta_i\cdot\left(R_{sp}^t-\bar{R}_{sp}\right)\right)^2}{T}; \qquad (10)$$

6) показник ризику одиничного портфеля:

$$\sigma_{sp} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_{sp}^{t} - \bar{R}_{sp}\right)^{2}}{T}}. \quad (11)$$

В розглянутій моделі є зовнішня змінна – норма доходності цінних паперів емітента за кожен із періодів. До контрольованих змінних слід віднести: склад портфелю цінних паперів; норма ризику портфелю; норма доходності всього портфелю; максимальна частка цінних паперів кожного з емітентів у портфелі.

Прикладом неконтрольованих змінних можуть служити стан законодавства, політична стабільність.

Застосування інформаційних технологій для обробки даних значно полегшує та прискорює процес оптимізації, дозволяє моделювати різні сценарії розвитку подій.

Дослідження процесу управління інноваційним розвитком економічних систем засобами математичного моделювання дає можливість отримати інформацію про стан об'єкту управління під впливом змін внутрішніх і зовнішніх діючих факторів.

Задача 1. Сформувати оптимальний фондовий портфель, який складається з 4 акцій. Нехай експерт визначив, що клієнту вигідно інвестувати кошти в акції таких підприємств, як «Дніпровська ГЕС», «Західенерго», «Гідроенергетика України», «ДТЕК». Період аналізу один рік. Дані по місяцях по вартості акцій компаній опрацювати за 2015 рік.

Форми контролю знань – презентація виконаних завдань у вигляді розв’язаних, за допомогою програми пакету MS Office, задач, обговорення виконаних завдань.

Рекомендована література до теми лабораторного заняття:

Основна та допоміжна література:

1. Юрчук Н. П. Використання економіко-математичних методів в управлінні інноваційним розвитком економічних систем / Н. П. Юрчук // Інвестиції: практика та досвід. – 2015. – № 18. – С. 28-32.
2. Бондаренко М. І. Проблеми активізації інноваційної активності українських підприємств як фактор підвищення конкурентоспроможності в умовах фінансово-економічної кризи [Текст] / М. І. Бондаренко, Л. С. Любохинець, В. В. Мельник // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2011. – № 6. – Т. 1. – С. 84-89.
3. Бурденюк І. Теоретичні аспекти економіко-математичного моделювання інноваційних процесів розвитку підприємства / І. Бурденюк // Вісник Львівського університету: сер. економічна . – 2013 . – Вип. 50. – С. 20-26.
4. Бершадська, І. М. Модель Марковіца як основа побудови алгоритму формування ефективного інвестиційного портфеля [Текст] / І. М. Бершадська // Академічний огляд. – 2010. – № 2 (33). – С. 75–79.

Інтернет ресурси:

1. Грабовецкий Б.Є. Теоретичні і методологічні основи економічного прогнозування: навчальний посібник [Електроний ресурс] / Б.Є. Грабовецкий // Основи економічного прогнозування. — Вінниця: ВФ ТАНГ, 2000. — Режим доступу: http://pulib.if.ua/part/9816.
2. https://uchebnikionline.com/investirovania/investuvannya_moyseyenko_i_p/model_kvazi-sharpa.htm.
3. Жданов И. Финансовый анализ и инвестиционный анализ предприятия [Електроний ресурс] / И. Жданов // BE in trend – Режим доступу: http://www.beintrend.ru/l-r.

Обладнання заняття, ТЗН тощо: ноутбук, ПЕОМ.

Завдання студентам на самостійне опрацювання навчального матеріалу, рішення задач, розв'язання вправ для підготовки до наступного лабораторного заняття.

Задача 1. Сформувати оптимальний фондовий портфель, який складається з 5 акцій. Нехай експерт визначив, що клієнту вигідно інвестувати кошти в акції таких підприємств, «Райффайзен Банк Аваль», «Центренерго», «Фармак», «Київенерго» та «МАУ». Період аналізу один рік. Дані по місяцях по вартості акцій компаній опрацювати за 2016 рік.

Укладач: _____ Васьків О. М., ст. викладач
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

План лабораторного заняття № 7

Тема 9. Математичні методи і моделі аналізу процесів інноваційного розвитку підприємства.

Навчальний час: 3 год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки»,

Мета і завдання лабораторного заняття: навчитись розв'язувати задачу інвестування за допомогою динамічного програмування.

Питання для перевірки базових знань за темою лабораторного заняття:

1. Фундаментальний принцип ДП.
2. Поняття алгоритму прямої прогонки.
3. Поняття алгоритму зворотної прогонки.
4. Елементи моделі динамічного програмування.
5. Рекурентне рівняння для зворотної прогонки.
6. У ролі яких змінних виступають невідомі величини?
7. В яких межах перебуває значення індексу *t* для змінної x_{ji} ?
8. Яким чином формується інвестиційний портфель і календарний план?
9. Яких значень може набувати змінна x_{ji} ?
10. Яких значень набуває T_0 ?
11. До яких розв'язків приводять алгоритми прямої та зворотної прогонки?

Завдання:

1. Використовуючи рекурентне рівняння знайти оптимальні розв'язки для етапів 4-1 (задачі 1, 2).
2. Запустити програму Excel, сформувати таблицю з початковими даними.
3. Обчислити чистий, зведений до початку життєвого циклу, дохід за проектом, значення таблиці.
4. Скласти математичну модель задачі.
5. Скориставшись «Пошуком рішення», розв'язати задачу.
6. Врахувавши нові початкові дані, розв'язати задачу, проаналізувати результаті розрахунків показники та зробити висновки.

Задача 1: Припустимо, ви хочете інвестувати 6 тис. дол. зараз і 4 тис. дол. на початку кожного року, від другого до четвертого, рахуючи від поточного року. Перший банк виплачує річний складний процент 6,5% і преміальні протягом наступних чотирьох років у розмірі 1,4; 1,3; 2,41 і 2,7% відповідно.

Річний складний процент, який пропонує другий банк, на 0,3% нижче, ніж пропонує перший банк, але його преміальні на 0,7% вищі. Задача полягає у максимізації накопиченого капіталу до кінця четвертого року.

Форми контролю знань – презентація виконаних завдань у вигляді розв'язаних, за допомогою програми пакету MS Office, задач, обговорення виконаних завдань.

Рекомендована література до теми лабораторного заняття:

Основна та допоміжна література:

1. Бурденюк І. Теоретичні аспекти економіко-математичного моделювання інноваційних процесів розвитку підприємства / І. Бурденюк // Вісник Львівського університету: сер. економічна . – 2013 . – Вип. 50. – С. 20-26.
2. Васильєва Л. В. Використання комп'ютерних технологій для розв'язування оптимізаційних задач в економіці: навч. посібник [для студ. вищ. навч. закл.] / Л. В. Васильєва, І. А. Гетьман. – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 240 с.
3. Дікань Л. В. Оцінка впливовості складових інноваційного потенціалу на інноваційну активність підприємств промисловості / Л. В. Дікань, Є. В. Колесников // Економіка розвитку. – 2006. – №1. – С. 98-101.
4. Литюга Ю. В.Технологія формування та розвитку інвестиційного потенціалу підприємства / Ю. В. Литюга // Формування ринкових відносин в Україні. – 2008. – №10 (89). – С. 76-83.

Інтернет ресурси:

1. http://www.confcontact.com/2016-ekonomika-i-menedzhment/7_diduk.htm.
2. http://mmi.fem.sumdu.edu.ua/sites/default/files/mmi2013_3_251_263.pdf.
3. http://eprints.kname.edu.ua/43480/1/2016%20печ%20115Л.pdf.

Обладнання заняття, ТЗН тощо: ноутбук, ПЕОМ.

Завдання студентам на самостійне опрацювання навчального матеріалу, рішення задач, розв'язання вправ для підготовки до наступного лабораторного заняття.

Задача: Розробити оптимальну стратегію інвестування, якщо у моделі інвестування об'єм інвестицій складає $C = 15000\$$ на 4-річний період. Існує 25% ймовірність того, що ви подвоїте гроші, 13% – залишитесь при своїх грошах і 27% – втратите весь об'єм інвестицій.

Задача: Сформувати інвестиційний портфель та календарний план його виконання у детермінованому випадку при наступних початкових даних. Ставка дисконту e=0,4.

Початкові дані для розв'язку задачі

Показник	Рік життєвого циклу				
	1	2	3	4	5
Інвестиційні витрати	60	45	35	100	800
Поточні витрати	30	80	100	-	200
Поточні результати	20	-	200	600	-

Укладач: _____ Васьків О. М., ст. викладач

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

План лабораторного заняття № 8

Тема 10. Математичне моделювання функціонування та оцінювання стратегій розвитку малих підприємств.

Навчальний час: 2год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки»,

Мета і завдання лабораторного заняття: полягає у наданні студентам знань з інструментарію моделювання функціонування та оцінювання стратегій розвитку підприємств, що здійснюються методом повного перебору та методом ітерацій по стратегіях.

Питання для перевірки базових знань за темою лабораторного заняття:

1. Метод повного перебору.
2. Метод ітерацій по стратегіях без дисконтування.
3. Метод ітерацій по стратегіях з дисконтуванням.
4. Крок оцінки параметрів.
5. Крок покращення стратегії.
6. Поняття коефіцієнта дисконтування та рекурентне рівняння.
7. Поняття сподіваного прибутку.

Завдання:

1. Розв'язати задачу методом повного перебору при нескінченній кількості етапів.
2. Розв'язати задачу методом ітерації по стратегіях, припускаючи що горизонт планування нескінченний.
3. Розв'язати задачу, якщо коефіцієнт дисконтування рівний $\alpha = 0{,}7 + k/100.$

Теоретичні відомості та методичні вказівки для виконання

Існує два методи розв'язку задачі з нескінченною кількістю етапів. Перший метод ґрунтується на переборі *всіх можливих* стаціонарних стратегій в задачі прийняття рішення. Метод *повного перебору* можна використовувати тільки тоді, коли загальна кількість стаціонарних стратегій з точки зору практичних обчислень достатньо мала. Другий метод, який називається *методом ітерацій по стратегіях,* як правило, є більш ефективним, оскільки визначає оптимальну стратегію ітераційним шляхом.

Метод повного перебору

Припустимо, що в задачі прийняття рішення є S стаціонарних стратегій. Нехай - матриці перехідних (однокрокових) ймовірностей і прибутків, які відповідають певній стратегії, $s = 1, 2, \ldots, S$. Метод перебору включає наступні дії:

Крок 1. Обчислюємо v_i^s – сподіваний прибуток, який одержується за один етап при стратегії s для заданого стану *i*.

Крок 2. Обчислюємо π_i^s – довгострокові стаціонарні ймовірності матриці перехідних ймовірностей P^s, які відповідають стратегії *s*. Ці ймовірності (якщо вони існують) знаходяться з рівнянь

$$\pi^s P^s = \pi^s,$$
$$\pi_1^s + \pi_2^s + \ldots + \pi_m^s = 1, \qquad (1)$$

де $\pi^s = (\pi_1^s, \pi_2^s, \ldots, \pi_m^s)$.

Крок 3. Обчислюємо по наступній формулі E^s сподіваний прибуток за один крок (етап) при вибраній стратегії *s*.

Крок 4. Оптимальна стратегія s^* визначається з умови, що

$$E^{s^*} = \max_s \{E^s\}. \qquad (2)$$

Проілюструємо цей метод на прикладі задачі аграрного підприємства при нескінченному горизонті планування.

Приклад 1. В задачі є вісім стаціонарних стратегій, які представлені у табл. 1:

Таблиця 1

Стаціонарні стратегії задачі аграрного підприємства

Стаціонарна стратегія, *s*	Дії
1	Не застосовувати добрива взагалі
2	Застосовувати добрива незалежно від стану ґрунту
3	Застосовувати добрива, якщо ґрунт знаходиться у стані 1
4	Застосовувати добрива, якщо ґрунт знаходиться у стані 2
5	Застосовувати добрива, якщо ґрунт знаходиться у стані 3
6	Застосовувати добрива, якщо ґрунт знаходиться у стані 1 чи 2
7	Застосовувати добрива, якщо ґрунт знаходиться у стані 1 чи 3
8	Застосовувати добрива, якщо ґрунт знаходиться у стані 2 чи 3

Матриці P^s і R^s для стратегій від 3 до 8 отримуються з аналогічних матриць для стратегій 1 і 2.

Таким чином, маємо

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \; R^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \; R^5 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^6 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^7 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \; R^7 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}4 & 0{,}55 \end{pmatrix}, \; R^8 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Метод ітерацій по стратегіях без дисконтування

Щоб оцінити труднощі, пов'язані із застосуванням методу повного перебору, припустимо, що у агропідприємства замість двох є чотири стратегії поведінки (альтернативи): не удобрювати, удобрювати один раз на сезон, удобрювати двічі і удобрювати тричі на сезон. У цьому випадку загальна кількість стратегій, які є у розпорядженні підприємства, рівна $4^4 = 2562$ стаціонарних стратегій. Тяжко не тільки перерахувати у явному вигляді всі ці стратегії, але і може виявитись також неприпустимо великим об'єм обчислень, які знадобляться для оцінки всієї множини стратегій.

Метод ітерацій по стратегіях ґрунтується на наступному. Як уже зазначалось, для будь-якої конкретної стратегії сподіваний сумарний прибуток за *n-ий* етап визначається рекурентним рівнянням

$$f_n(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f_{n+1}(j), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Це рівняння і служить основою методу ітерацій по стратегіях. Однак, щоб зробити можливим вивчення асимптотичної поведінки процесу, вид рівняння можна трохи змінити. На відміну від величини *n*, яка фігурує в рівнянні і відповідає *n-му* етапу, позначимо через η кількість етапів, які *залишаються для аналізу*. Тоді рекурентне рівняння записується у вигляді

$$f_\eta(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f_{\eta-1}(j), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Тут f_η – сумарний сподіваний прибуток при умові, що залишилися не розглянутими η етапів. При такому визначенні η можна вивчити асимптотичну поведінку процесу, покладаючи при цьому, що $\eta \to \infty$.

Позначимо через $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ вектор довгострокових стаціонарних

ймовірностей з матрицею перехідних ймовірностей $P = \|p_{ij}\|$ і нехай $E = \pi_1 v_1 + \pi_2 v_2 + \ldots + \pi_m v_m$ – сподіваний прибуток за етап, обчислений по схемі попереднього розділу, тоді можна показати, що при достатньо великому η

$$f_\eta(i) = \eta E + f(i). \qquad (5)$$

де $f(i)$ – постійний член, який описує асимптотичну поведінку функції $f_\eta(i)$ при заданому стані *i*.

Так як $f_\eta(i)$ представляє сумарний оптимальний прибуток за η етапів при заданому стані *i,* а *E* – сподіваний прибуток за *один етап*, то зрозуміло, чому величина $f_\eta(i)$ рівна сумі ηE та коригуючому числу $f(i)$, яке враховує визначений стан *i.* При цьому звичайно, передбачається, що число η достатньо велике.

Тепер рекурентне рівняння можна записати у наступному вигляді

$$\eta E + f(i) = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\{(\eta - 1)E + f(j)\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (6)$$

Спростивши це рівняння, одержуємо

$$E + f(i) - \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f(j) = v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (7)$$

тобто, маємо *m* рівнянь з *m+1* невідомими $f(1), f(2), \ldots, f(m)$ і *E*.

Тут кінцевою ціллю є визначення оптимальної стратегії, яка приводить до максимального значення *E.* Так як є *m* рівнянь з *m+1* невідомими, оптимальне значення *E* не можна визначити за один крок. У зв'язку з цим використовується ітеративна процедура, яка починається з довільної стратегії.

За допомогою ітеративної процедури визначається нова стратегія, яка дає ліпше значення *E.* Ітеративний процес закінчується, якщо дві послідовно одержувані стратегії співпадають.

Ітеративний процес складається з двох основних кроків.

1. *Крок оцінки параметрів.* Вибираємо довільну стратегію *s*. Використовуючи відповідні їй матриці P^s і R^s та покладаючи (довільно) $f^s(m) = 0,$ розв'язуємо рівняння

$$E^s + f^s(i) - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^s f^s(j) = v_i^s, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (8)$$

відносно невідомих E^s, $f^s(1), \ldots, f^s(m-1)$. Переходимо до наступного кроку.

2. *Крок покращення стратегії*. Для кожного стану *i* визначаємо альтернативу *k,* яка забезпечує

$$\max_k \left\{ v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f^s(j) \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (9)$$

(Тут використовуються значення $f^s(j),\ j = 1, 2, \ldots, m,$ визначені на кроці оцінки параметрів.). Результуючі оптимальні розв'язки для станів $1, 2, \ldots, m$ формують нову стратегію *t.*

Якщо *s* і *t* ідентичні, то алгоритм закінчується, в цьому випадку *t* – оптимальна стратегія. У протилежному випадку покладаємо $s = t$ і повертаємося до кроку оцінки параметрів.

Оптимізаційна задача на кроці покращення стратегії потребує пояснення. Ціллю цього кроку є одержання максимального значення *E*. Як показано вище,

$$E = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} f(j) - f(i). \qquad (10)$$

Оскільки $f(i)$ не залежить від альтернатив *k*, задача максимізації на кроці покращення стратегії еквівалентна максимізації *E* за альтернативами *k*.

Приклад 2. Розв'язуємо задачу агропідприємства методом ітерації по стратегіях.

Почнемо з довільної стратегії, яка виключає застосування добрив. Маємо відповідні матриці

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рівняння кроку оцінки параметрів набувають вигляду

$$E + f(1) - 0{,}2 f(1) - 0{,}5 f(2) - 0{,}3 f(3) = 5{,}3,$$
$$E + f(2) - 0{,}5 f(2) - 0{,}5 f(3) = 3,$$
$$E + f(3) - f(3) = -1.$$

Покладаючи $f(3) = 0,$ одержуємо розв'язок цих рівнянь

$$E = -1, \quad f(1) = 12{,}88, \quad f(2) = 8, \quad f(3) = 0.$$

Метод ітерацій по стратегіях з дисконтуванням

Описаний метод ітерацій по стратегіях можна узагальнити на випадок дисконтування.

Якщо позначити через $\alpha \prec 1$ коефіцієнт дисконтування (переоцінки), то рекурентне рівняння при скінченній кількості етапів можна записати у наступному вигляді

$$f_\eta(i) = \max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f_{\eta-1}(j) \right\}. \qquad (11)$$

Відзначимо, що η рівне кількості етапів які необхідно розглянути. Можна показати, що при $\eta \to \infty$ (модель з нескінченною кількістю етапів) $f_\eta(i) = f(i),$ де $f(i)$ – приведений до поточного моменту часу дисконтований прибуток при умові, що система знаходиться у стані *i* і функціонує на нескінченному інтервалі часу.

Таким чином, довготермінова поведінка $f_\eta(i)$ при $\eta \to \infty$ не залежить від значення η.

У цьому полягає відмінність від випадку без дисконтування, коли $f_\eta(i) = \eta E + f(i).$ Цього слід було очікувати, оскільки у випадку з дисконтуванням вплив майбутніх прибутків асимптотично зменшується до нуля. Дійсно, приведений прибуток $f(i)$ повинен наближатися до постійної величини при $\eta \to \infty.$

З врахуванням вищенаведеного у даному випадку при використанні методу ітерацій по стратегіях виконується наступна дія.

1. *Крок оцінки параметрів.* Для довільної стратегії *s* з матрицями P^s і R^s

розв'язуємо систему з m рівнянь

$$f^s(i) - \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^s f^s(j) = v_i^s, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (12)$$

відносно m невідомих $f^s(1), \quad f^s(2), \ldots, f^s(m)$.

2. Крок покращення стратегії. Для кожного стану i визначаємо альтернативу k, яка забезпечує

$$\max_k \left\{ v_i^k + \alpha \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k f_{\eta-1}(j) \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (13)$$

де $f^s(j)$ мають значення, визначені на кроці оцінки параметрів. Якщо одержана стратегія t співпадає зі стратегією s, то алгоритм закінчений; у цьому випадку стратегія t оптимальна.

У протилежному випадку покладемо $s=t$ і повторюємо крок оцінки параметрів.

Приклад 3. Розв'яжемо задачу з прикладу 2 з урахуванням коефіцієнта дисконтування $\alpha = 0{,}6$.

Виберемо довільну стратегію, наприклад $s = \{1, 1, 1\}$. Матриці P і R (P^1 і R^1 у прикладі 1 визначають рівняння)

$$f(1) - 0{,}6\left[0{,}2 f(1) + 0{,}5 f(2) + 0{,}3 f(3)\right] = 5{,}3,$$
$$f(2) - 0{,}6\left[0{,}5 f(2) + 0{,}5 f(3)\right] = 3,$$
$$f(3) - 0{,}6\left[+ f(3)\right] = -1.$$

Розв'язок цих рівнянь:

$$f_1 = 6{,}61, \quad f_2 = 3{,}21, \quad f_3 = -2{,}5.$$

Задача 1: Фірма кожен рік оцінює стан зі збутом одного із видів своєї основної продукції і дає йому хорошу (стан 1), задовільну (стан 2) чи незадовільну оцінку (стан 3). Необхідно прийняти рішення про доцільність рекламування цієї продукції в цілях розширення її збуту. Наведені нижче матриці P^1 і P^2 визначають перехідні ймовірності при наявності реклами і без неї протягом будь-якого року.

Відповідні прибутки задані матрицями R^1 і R^2.

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 + k/100 & 0{,}2 - k/100 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 + k/100 & 0{,}1 - k/100 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad R^1 = \begin{pmatrix} 100 + k & 130 & 160 \\ 80 & 100 + k & 170 \\ 60 & 70 & 110 + k \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 - k/100 & 0{,}2 & 0{,}2 + k/100 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 + k/100 & 0{,}3 - k/100 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 110 & 135 + k & 170 \\ 90 & 110 + k & 175 \\ 80 & 75 + k & 115 \end{pmatrix}.$$

Форми контролю знань – презентація виконаних завдань у вигляді розв’язаних, за допомогою програми пакету MS Office, задач, обговорення виконаних завдань.

Рекомендована література до теми лабораторного заняття:

Основна та допоміжна література:

1. Скітер І. С. Математичні методи прийняття управлінських рішень: Навч. пос. / І. С. Скітер, Н. В. Ткаленко, О. В. Трунова. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2011. – 250 с.
2. Кульчинська О. О. Роль стратегічного планування в ефективній діяльності підприємств / О. О. Кульчинська // Вісник. Економіка. Проблеми економічного становлення. – 2012. – № 1. – С. 83-88.
3. Інформаційні технології та моделювання бізнес-процесів: [навч. посібник] / О. М. Томашевський, Г. Г. Цигелик, М. Б. Вітер, В. І. Дудук. – К.: Центр учб. л-ри, 2012. – 296 с.

Інтернет ресурси:

Обладнання заняття, ТЗН тощо: ноутбук, ПЕОМ.

Завдання студентам на самостійне опрацювання навчального матеріалу, рішення задач, розв'язання вправ для підготовки до наступного лабораторного заняття.

Задача: Фірма кожен рік оцінює стан зі збутом одного із видів своєї основної продукції і дає йому хорошу (стан 1), задовільну (стан 2) чи незадовільну оцінку (стан 3). Необхідно прийняти рішення про доцільність рекламування цієї продукції в цілях розширення її збуту. Наведені нижче матриці P^1 і P^2 визначають перехідні ймовірності при наявності реклами і без неї на протязі будь-якого року. Відповідні прибутки задані матрицями R^1 і R^2.

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}65 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad R^1 = \begin{pmatrix} 101 & 130 & 160 \\ 80 & 101 & 170 \\ 60 & 70 & 111 \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 110 & 137 & 170 \\ 90 & 112 & 175 \\ 80 & 77 & 115 \end{pmatrix}.$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Розв'язати задачу методом повного перебору при нескінченній кількості етапів.

Укладач: _____ Васьків О. М., ст. викладач
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

План лабораторного заняття № 9

Тема 11. Математичні методи та моделі оцінювання системних характеристик підприємства: маневреність, життєздатність, надійність, ризик, напруженість, інерційність.

Навчальний час: 4год.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Вступ до фаху», «Інформатика», «Моделювання економіки».

Мета і завдання лабораторного заняття: навчитись використовувати метод визначення матричної гри за допомогою лінійного програмування при оптимізації структури «валютного кошика».

Питання для перевірки базових знань за темою лабораторного заняття:

1. Поняття норми прибутку.
2. Сподівана норма прибутку.
3. Принцип максимальної невизначеності Гіббса-Джейнса.
4. Поняття матричної антагоністичної гри з нульовою сумою.
5. Метод визначення матричної гри за допомогою лінійного програмування.
6. Яким чином можна визначити, чи матриця має сідловий елемент?
7. Як скоригувати значення елементів матриці для того, щоб вони були додатними?

Завдання:

1) Нехай дано ціни валют 4 видів (амер. долара, євро, фунта стерлінгів та рос. рубля) за одну одиницю у нац. гр. од. (гривні), які спостерігалися за 12 періодів (12 міс. 2015 р., інформація про валюти представлена на основі документації валютного відділу Львівської філії АКБ «Укрсоцбанк», табл. 4);

2) обчислити значення норми прибутку $r_{ij}(i=1,\ldots,4;)$ у періоди $j=2,\ldots,12.$ за формулою $r_{ij}=\dfrac{f_{ij}-f_{ij-1}}{f_{ij-1}}$.

Сформувати таблицю з значеннями норм прибутків.

Скоригувати значення норм прибутків на 1 для отримання додатніх елементів матриці;

3) визначити, чи матриця R має сідловий елемент.

Для цього знайдемо мінімальні елементи у рядках матриці, а тоді максимальне з них, та максимальні у стовпцях, а тоді мінімальне з них:

$$\alpha=\max_i \alpha_i=\max_i \min_j r_{ij} \qquad \beta=\min_j \beta_j=\min_j \max_i r_{ij}$$

4) розв'язати матрицю за допомогою симплекс-методу.

Як вже зазначалося раніше, необхідно розв'язати дві задачі: одну на мінімум цільової функції, оскільки перший гравець прагне знайти такі значення p_i^*, і відповідно l_i, щоб ціна гри була максимальною, а іншу – на максимум, оскільки

другий гравець прагне знайти такі значення q_j^*, і відповідно b_j щоб ціна гри була мінімальною.

Таблиця 4

Курси валют за 2015 рік відносно гривні

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Євро	9,94	9,98	9,97	9,71	9,41	9,15	9,08	10,20	10,19	10,06	10,95	10,9
Долар	8,30	8,30	8,29	8,18	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05	8,05
Рубль	0,18	0,18	0,19	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,16
Ф.стр.	11,9	11,99	11,07	11,82	11,36	11,19	11,85	11,05	11,139	11,90	11,77	11,8

Зробити наступні висновки: у якому вигляді можна записати оптимальну структуру «валютного кошика»?; у якому співвідношенні банку доцільно розподіляти свої кошти між усіма валютами?; визначити які валюти є найстабільнішими і складають основу портфеля валют; визначити максимальну норму прибутку; визначити, що є протидією для гравця отримати максимальний прибуток і у яких відсотках.

Задача 1: Порівняльний аналіз структури «валютних кошиків» 2005 та 2015 років. Для порівняння структури «валютного кошика» 2005 року, з «валютним кошиком», що складається з грошових одиниць країн, котрі пізніше ввійшли до Європейського Союзу, сформувати портфель валют на основі валютних курсів за 2015 рік (інформація про валюти представлена на основі документації валютного відділу Львівської філії АКБ «Укрсоцбанк»).

Форми контролю знань – презентація виконаних завдань у вигляді розв'язаних, за допомогою програми пакету MS Office, задач, обговорення виконаних завдань.

Рекомендована література до теми лабораторного заняття:

Основна та допоміжна література:

1. Пономаренко В. С. Моделювання поведінки інвестора на фондовому ринку : монографія / В. С. Пономаренко, О. В. Раєвнєва, К. А. Стрижиченко. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2004. – 254 с.

Інтернет ресурси:

1. Савчук В. П. Оптимізація фондового портфелю // http://www.management.com.ua/finance/fin013.html.
2. Сомик А. В. Валютний кошик як операційний орієнтир курсової політики: зарубіжний досвід та перспективи для України // http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=2556.
3. Валютний кошик // http://bibliograph.com.ua/vneshneeconomicheskie-svyazi/86.htm.

Обладнання заняття, ТЗН тощо: ноутбук, ПЕОМ.

Завдання студентам на самостійне опрацювання навчального матеріалу,

рішення задач, розв’язання вправ для підготовки до наступного лабораторного заняття.

Задача: Дано ціни валют трьох видів (американського долара, євро, фунта стерлінгів) за одну одиницю у національних грошових одиницях (гривні), які спостерігалися за минулі 12 місяців 20016 року (інформація про валюти представлена на основі документації валютного відділу Львівської філії АКБ "Райфайзенбанк"). Реалізувати задачу формування „валютного кошика” та здійснити аналіз отриманого результату.

Укладач: _____ Васьків О. М., ст. викладач
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)