|  |  |
| --- | --- |
| **UNBIZ1957с** | **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ****ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА****ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ФІНАНСАМИ ТА БІЗНЕСУ****ЗАТВЕРДЖЕНО****на засіданні кафедри цифрової економіки** **та бізнес-аналітики****протокол № 6 від “21” січня 2020 р.****Зав. кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шевчук І.Б.** (підпис)**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ****З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ** **Дослідження операцій** (назва навчальної дисципліни)**галузь знань:** 05 «Соціальні та поведінкові науки»  (шифр та найменування галузі знань)**спеціальність:** 051 “Економіка”  (код та найменування спеціальності)**спеціалізація:** \_\_ \_Інформаційні технології в бізнесі\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (найменування спеціалізації)**освітній ступінь:** бакалавр  (бакалавр/магістр) **Укладач:**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент  (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)**ЛЬВІВ 2020** |
| ***КАФЕдра цифрової економіки та бізнес-аналітики*** |

**Конспект лекції № 9**

Тема № 9. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРІЇ матричних ІГОР

**Міжпредметні зв’язки:** Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Теорія випадкових процесів” та „Інформатика”.

**Мета лекції:** познайомити з методами розв’язку задач теорії Неймана про мінімакс.

### План лекції

1. Загальна характеристика задач теорії ігор і методів їх розв'язування.
2. Теорема Неймана про мінімакс.

**Опорні поняття:** методи розв’язку задач теорії ігор, методи знаходження початкового розв’язку, критерій оптимальності.

**Інформаційні джерела:**

Основна та допоміжна література:

1. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.
2. Дослідження операцій: Підручник, у 2-х томах. Том 1. – ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2015.
3. Зайченко Ю.П., Шумилов С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища школа, 1984.
4. Пономаренко Л.А. Основи економічної кібернетики. Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2012.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. – М.: Изд-во БЕК, 2002.
6. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д., Семьонов Д.Є. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2014.

**Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо:** ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

## ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

**задачі теорії ігор програмування**

# *ТЕМА 12. Деякі ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ матричних ІГОР.*

**1.Основні поняття.**

Одна із задач теорії оптимальних рішень – прийняття рішень в умовах невизначеності. Для обґрунтування рішень розроблені спеціальні математичні методи, які розглядаються в теорії ігор.

Теорія ігор є математичною формалізацією різних конфлікт­них си­ту­ацій, суть яких полягає в тому, що кілька учасників праг­нуть досягти певних суперечливих, як правило, цілей, причому ступінь цього досяг­нен­ня залежить від способу дій (стратегій) учасників, кожний з яких пра­гне максимізувати міру досягнення поставленої мети. Учасниками гри можуть бути як окремі індивідуми, так і цілі організа­ції, а також явища і об’єкти природи (погода, надра тощо).

Невизначеність результату гри полягає у відсутності інформації про дії суперника, про його стратегії. Невизначеність результату гри ви­кли­кається різними причинами, які можна розбити на три групи:

1) Особливості правил гри викликають такі різноманітності в її розвитку, що передбачити результат гри наперед неможливо. Такі ігри називаються комбінаторними. Прикладом є гра в шахи.

2) Іншим джерелом невизначеності є вплив випадкових чин­ників. Ігри, в яких результат виявляється невизначеним виключно через випад­кові причини, називаються азартними (ігри в кості; рулетка тощо).

3) Третє джерело невизначеності полягає у відсутності інфор­мації про дії суперника, про його стратегії. Такі ігри називаються страте­гіч­ними.

Розглянемо гру, в якій зіштовхуються інтереси двох суперників. Під *грою* розумітимемо деяку послідовність дій (ходів) гравців, яка здій­снюється у відповідності з чітко сформульованими правилами. *Ходом* називається вибір однієї із запропонованих правилами гри дії її здійсне­ння. *Стратегією* гравця називається план, за яким він здійснює вибір у будь-якій можливій ситуації і при будь-якій можливій інформації. Зада­чею теорії ігор є здійснення рекомен­дацій для гравців, тобто визна­чення для них оптимальної стратегії. *Оптимальною* називається стратегія, яка при багатократному повто­рен­ні гри забезпечує даному гравцеві максимально можливий середній виграш.

Найпростіший вид стратегічної гри – гра двох осіб з нульовою сумою (сума виграшів сторін дорівнює нулю).

Нехай гру ведуть два суперники-гравці, причому один з них може застосовувати *m* різних способів дій (стратегій), а другий, відповідно, *n* стратегій, де *m*, *n* – скінчені числа.

Припустимо, що гра одноходова, тобто кожний гравець закінчує гру за один хід – один вибір якоїсь стратегії серед можливих. При виборі першим гравцем *і*-ї стратегії , а другим *j*-ї стратегії результат гри визначається числом *aij* , яке означає виграш першого гравця і про­граш другого, так що сума виграшів обох гравців дорівнює нулю. Вели­чи­ни *aij* утворюють прямокутну матрицю розміром (*m*×*n*), яка називається платіжною або матрицею виграшів першого гравця.

Зрозуміло, що величини *aij* можуть бути додатними (коли перший гравець реально виграє), від'ємними (коли перший гравець реально програє) і нульовими (нічия).

*Приклад.* *Гра у відгадування*. Нехай один партнер потай від іншого затискує в руці невеликий предмет, наприклад монету, а другий відгадує – в правій чи лівій руці цей предмет затиснутий. Відгадування означає виграш другого і програш першого, не відгадування – зворотний результат. Отже, кожний гравець має дві чисті стратегії: перший – покласти предмет у ліву (одна чиста стратегія) або в праву руку (друга чиста стратегія); другий - показати на ліву руку партнера (одна чиста стратегія) або на праву (друга чиста стратегія). Платіжна матриця має такий вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| -1 | 1 |
| 1 | -1 |

Припустимо тепер, що з певних міркувань, чи навіть підсвідомо, або з погляду на обставини гравець може вибирати окремі чисті стратегії з певними ймовірностями, що їм відповідають: перший з імовірностями *p*1, *p*2, … , *pm* , а другий – з імовірностями *q1, q2, … , qm* .

 **Означення.** Вектор, компонентами якого є ймовірності вибору чистих стратегій одного з гравців, називається *змішаною стратегією* цього гравця.

Позначимо окрему змішану стратегію першого гравця ***p***= (*p*1, *p*2, … , *pm*), а всю множину можливих змішаних стратегій – ***Р*** =(***р***) для другого гравця, відповідно, ***q***= (*q*1, *q*2, … , *qm*) i ***Q*** ==(***q***)**.**

Для одноходової гри очевидні рівності

*p*1 + *p*2 +… + *pm* =1 ; *q*1 + *q*2 +… + *qm* =1, (2.110)

оскільки чисті стратегії кожного гравця утворюють повну систему елементарних подій.

Зазначимо, що кожну чисту стратегію можна вважати окремим випадком змішаної, приписавши в останній одній імовірності, яка відпо­ві­дає певній чистій стратегії значення одиниці, а всім іншим імовірно­стям нульові значення. Позначимо чисту стратегію, що розгля­дається як ви­падок змішаної, такими символами:

; . (2.111)

Розглянемо тепер випадкову подію, яка полягає в сумісному виборі першим гравцем *і-*ї чистої стратегії, а другим *j*-ї, позначивши цю подію символами (*ij*)*.*

Знаючи змішані стратегії, які застосовуються гравцями, легко обчи­слити ймовірність події (*ij*), застосувавши теорему множення ймо­вір­ностей незалежних подій:

. (2.112)

Оскільки кожній складній події (*ij*) однозначно відповідає елемент *аij* платіжної матриці, то ймовірність (2.112) є також і ймовірністю випад­ко­во­го результату гри *аij* (*i*=1, 2, … , *m*; *j*=1, 2, … , *n*). Оскільки сукупність усіх подій (*ij*) становить повну систему подій, то легко обчислити мате­мати­чне сподівання величини виграшу першого гравця при відомих змішаних стратегіях гравців

 (2.113)

Цілком зрозуміло, що при довільній, у тому числі й найкращій, змішаній стратегії другого гравця ***q*** перший гравець прагнутиме вибрати таку свою змішану стратегію ***р\*,*** щоб математичне сподівання його гарантованого виграшу було якнайбільшим, тобто

. (2.114)

У його партнера прагнення цілком протилежне: при довільній змі­шаній стратегії першого гравця ***р*** другий гравець прагне застосувати таку змішану стратегію ***q\****, щоб мінімізувати свій найбільш можливий про­граш (тобто гарантований виграш свого партнера, що те саме). Отже,

. (2.115)

Зрозуміло, що стратегія ***р\**** є оптимальною для першого гравця, якщо змішана стратегія партнера йому невідома. Це стосується і стратегії ***q\**** для другого гравця.

Припустимо, що обидва гравці застосовують свої оптимальні змішані стратегії ***р\**** і ***q\****.

Тоді значення математичного сподівання виграшу при цьому буде

 (2.116)

Величина *ν* називається значенням, або ціною гри, а оптимальні стратегії ***р\**** і ***q\**** – розв'язком матричної гри.

**2.Теорема Неймана про мінімакс**.

Будь-яка матрична гра двох партнерів з нульовою сумою має розв'язок (***р\**, *q\****), причому для довільних змішаних стратегій (***р*, *q***) іоптимальних стратегій (***р\**, *q\****) справедливі співвідношення

 (1.117)

3 останньої рівності випливає очевидне співвідношення

. (2.118)

 Теорема про мінімакс має геометричну інтерпретацію. Роз­глянемо гіперповерхню функції  в (*m*+*n*+1)-вимірному просторі. Розглядувана функція є визначе­ною на множині невід'ємних змін­них. Теорема про мінімакс рівно­сильна твердженню, що зазначена гіперповерхня має при  і   сідлову точку, тобто таку точку (***р\**, *q\****), у деякому околі якої для всіх ***р***і ***q*** справджуються співвідношення:

Рис.8

р

. (2.119)

Ця сідлова точка і є розв'язком матричної гри з нульовою сумою.

Для наочності можна використати прийом умовного зображення (*m*+*n*+1) - вимірного простору у вигляді тривимірного, позначаючи точка­ми осі абсцис змішані стратегії першого гравця, точками осі ординат – змішані стратегії другого гравця і від­кладаючи на осі аплікат значення величини *M*. Тоді можна дістати рис.8, що відповідає зазначеній геоме­тричній інтерпретації.

Рис.8

Розглянемо гру розміром 2×2, яка є нвйпростішим випадком скінченної гри. Якщо така гра має сідлову точку, то оптимальний розв’язок – це пара чмстих стратегій, які відповідають даній точці.

Гра, в якій відсутня сідлова точка згідно теореми Неймана має принаймі єдиний розв’язок у вигляді зиішаних стратегій ***P***\*  = (*p1\**, *p2\**) і ***Q***\*  = (*q1\**, *q2*\*).

Для того щоб їх знайти скористаємось теоремою про активні стратегії. Якщо чиста стратегія входить в оптимальну з ймовірністю відмінною від нуля, то вона називається *активною*. Справедлива теорема про активні стратегії: якщо один з гравців дотримується своєї опотимальної змішаної стратегії, ви виграш залишається незмінним і рівним ціні гри *v*, якщо другий гравець не виходить за межі своїх активних стратегій.

Отже, якщо гравець *A* дотримується своєї оптимальної стратегії ***P***\*, то його середній виграш буде рівний ціні гри v, якої би активної стратегії ***Q*** \*не використовував гравець *B*. Для гри 2×2 будь-яка чиста стратегія противника є активною, якщо відсутня сідлова точка. Виграш гравця *A* (програш гравця *B*) – випадкова велина, математичне сподівання (середнє значення) якої є *ціної гри* *v*. Тому середній виграш гравця *A* (оптимальна стратегія) буде рівною *v* для для 1-шої і для 2-гої стратегій противника.

Нехай гра задана платіжною матрицею

.

Середній виграш гравця *A*, якщо він використовує оптимальну змішану стратегію ***P***\*  = (*p1\**, *p2\**), а гравець *B* – чисту стратегію *B1* (це відповідає 1-му стовпцю платіжної матриці *H*), рівний ціні гри *v*:

*a11p1\**+ *a21p2\**= *v.*

Аналогічни вираз отримаємо, якщо гравець *B* використовує чисту стратегію *B2* (це відповідає 2-му стовпцю платіжної матриці *H*),

*a12p1\**+ *a22p2\**= *v*.

Врахувавши, що *p1\**+ *p2\**= 1, одержимо систему рівнянь для визначення оптимальної стратеії ***P*** і ціни гри *v*:

 (2.120)

Розв’язуючи цю систему, одержимо оптимальну стратегію

,

 (2.121)

і ціну гри

. (2.122)

Застосовуючи теорему про активні стратегії при пошуку ***Q\****– оптимальної стратегії гравця *B*, одержуємо для будь-якої чистої стратегії гравця *A* (*A1* чи *A2*) середній програш гравця *B* рівний грі *v*, тобто

 (2.123)

Тоді оптимальна стратегія ***Q***(*p1\*, p2\**) визначається формулами:

,

 (2.124)

Використаємо формули (2.121-2.124) для розв’язку економічної задачі.

*Приклад.* *Підприємство випускає продукцію, яка швидко псується. Її можна відразу відправити споживачу (стратегія A1), відправити на склад для зберігання (стратегія A2) або додатково обробити для довготермінового зберігання(стратегія A3). Споживач може придбати продукцію: відразу (стратегія В1), протягом невиликого часу (В2), після довгого періоду часу (B3).*

*У випадку стратегій A2 і A3 підприємство несе додаткові затрати на зберігання і обробку продукції, які не потрібні для A1, проте при A2 необхідно врахувати можливі збитки через псування продукції, якщо споживач вибере стратегії B2 або В3. Визначити оптимальні пропорції продукції для використання стратегій A1, A2, A3, керуючись “мінімаксними критеріями” (гарантований середній рівень збитків) для матриці витрат поданій в таблиці.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Bj**Ai* | *B1* | *B2* | *B3* |
| *A1* | 2 | 5 | 8 |
| *A2* | 7 | 6 | 10 |
| *A3* | 12 | 10 | 8 |

🕮 .**Економічна інтерпретація математичного розв’язку.**

Платіжна матриця даної гри має вигляд: . У да­ній матриці першу сирічку можна відкинути як невигідну (її елементи меньші за відповідні елементи другої стрічки), підприємству не вигідно відправити продукцію споживачу відразу після виробництва (стратегія *A1*), по нижчих цінах, які пропунує споживач (стратегії *B1*, *B2*, *B3*). Матриця набуде вигляду . Елементи першого стовпчи­ка більші за відповідні елементи другого стовпця, тому їх можна відкинути. Тепер уже споживачу не вигідно придбати відразу продукцію (стратегія *B1*) при кроках виробника (стратегії *A2*, *A3*). Гра сутттєво спростилась . Використаємо формули (2.121,2.122) для розрахунку ***P***\*,,  і ціни гри .

Отже оптимальна стратегія виробника продукції ***P***\* = (0; 1/3; 2/3), тобто стратегія *A1*, не застосовується, 1/3 продукції відправляється на склад (стратегія *A2*), 2/3 продукції додатково обробляється (стратегія *A3*), при цьому ціна гри *v* = 8,66.

### Загальний висновок за темою лекції

1. Організувати сукупність дій, необхідних для розв’язку задачі ТІ
2. Розібрати методи для розв’язку ТІ.

**Питання і завдання студентам для контролю знань.**

1. Загальна характеристика нелінійних задач теорії ігор.
2. Теорема Неймана про мінімакс.

**Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент

 (підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)