|  |  |
| --- | --- |
| **UNBIZ1957с** | **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  **ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**  **ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ФІНАНСАМИ ТА БІЗНЕСУ**  **ЗАТВЕРДЖЕНО**  **на засіданні кафедри цифрової економіки**  **та бізнес-аналітики**  **протокол № 6 від “21” січня 2020 р.**  **Зав. кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шевчук І.Б.**  (підпис)  **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  **З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**  **Дослідження операцій**  (назва навчальної дисципліни)  **галузь знань:** 05 «Соціальні та поведінкові науки»  (шифр та найменування галузі знань)  **спеціальність:** 051 “Економіка”  (код та найменування спеціальності)  **спеціалізація:** \_\_ \_Інформаційні технології в бізнесі\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (найменування спеціалізації)  **освітній ступінь:** бакалавр  (бакалавр/магістр)    **Укладач:**  Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент  (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)  **ЛЬВІВ 2020** |
| ***КАФЕдра цифрової економіки та бізнес-аналітики*** |

**Конспект лекції № 6**

Тема № 6. Розв’язування задач нелінійного програмування

**Міжпредметні зв’язки:** Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Теорія випадкових процесів” та „Інформатика”.

**Мета лекції:** познайомити з методами розв’язку задач нелінійного програмування..

### План лекції

1. Загальна характеристика задач нелінійного програмування і методів їх розв'язування.
2. Метод Лагранжа.
3. Загальна характеристика задач опуклого програмування і методів їх розв'язування.

**Опорні поняття:** методи розв’язку задач нелінійного програмування програмування, методи знаходження початкового розв’язку, критерій оптимальності.

**Інформаційні джерела:**

Основна та допоміжна література:

1. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.
2. Дослідження операцій: Підручник, у 2-х томах. Том 1. – ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2015.
3. Зайченко Ю.П., Шумилов С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища школа, 1984.
4. Пономаренко Л.А. Основи економічної кібернетики. Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2012.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. – М.: Изд-во БЕК, 2002.
6. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д., Семьонов Д.Є. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2014.

**Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо:** ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

## ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

**задачі НЕЛІНІЙНОГО програмування**

**1. Вигляд задач нелінійного програмування.**

Задача нелінійного програмування формулюється, як задача знаходження екстремуму функції мети n змінних



при наявності обмежень

,

коли хоча одна з функцій мети або системи обмежень являються нелі­нійними відносно керованих змінних *xj*. Вимога невід’ємності керованих змінних зберігається.

*xj*≥ 0, *(j = 1, … , n)*

Математичі моделі багатьох економічних і технічних задач являють собою задачі нелінійного програмування, в яких функцію мети потрібно максимізувати або с системі обмежень зустрічаються рівняння і нерівності різних знаків. Такі задачі зводяться до вигляду аналогічного до того, як це проводилось для задач лінійного програму­ван­ня.

Будь-який невід’ємний розв’язок системи нерівностей будемо вважати допустимим розв’язком задачі нелінійного програмуван­ня, а оптимальні розв’язки – такі допустимі розв’язки, при яких функція мети досягає мінімума.

Множину допустимих розв’язків будемо розглядати як деяку сукупність точок *n*-мірного простору *Rn*. Точку ***x****(x1, x2, … ,xn)* будемо називати внутрішньою точкою допустимої області, якщо її координати перетворюють нерівності в строгі нерівності, якщо ж хоча б одне з обмежень перетворюється в рівняння, то таку точку називають граничною точкою.

**2.Метод множників Лагранжа.**

Розглянемо розв’язок задачі пошуку мінімуму функції при обмеженнях виду:

*bi – gi(xj) = 0, i = 1, … , m.*

Припустимо, що функції *z(xj)* і *gi(xj)* та їхні похідні неперервні. Введемо набір змінних – множників Лагранжа - λ1, λ2, … , λm і сформує­мо функцію Лагранжа



Необхідні умови безумовного екстремуму функції будуть водночас і необхідними умовами для умовного екструмуму функції *z(xj)*.

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа утворюють систему *(n+m)* рівнянь



яку, зрештою, можна розв’язати відносно невідомих *x1, x2, … , xn, λ1, λ2, … , λm*.

Після цього необхідно визначити, в яких із найдених точок функція мети досягає мінімуму і порівняти їх зі значеннями функції на границі. Необхідність додаткових досліджень пов’язана з тим фактом, що в розв’язок системи входять точки, в яких можливий локальний мінімум.

Дослідження задачі нелінійного програмування на наявність глобального екстремума методом множників Лагранжа здійснюють в такій послідовності.

1. Скласти функцію Лагранжа.
2. Знайти частинні похідні функції Лагранжа по її аргументах.
3. Розв’язати систему *(m+n)* рівнянь, знайти критичні точки.
4. Серед критичних точок виділити точки які надають мінімум функції мети.
5. Визначити точку глобального мінімума.

**3.Геометрична інтерпретація метода Лагранжа.**

Відносні локальні мінімуми *min F(x1, x2, … , xn, λ1, λ2, … , λm)* при обмеженнях *g(x1, x2, … , xn)* можуть бути тільки в точках, де лінії рівня функції *min F(x1, x2, … , xn, λ1, λ2, … , λm )* дотикаються до кривої *g(x1, x2, … , xn)* (точки A1, A2). Для інших точок кривої, рухаючись вздовж границі  *g(x1, x2, … , xn)* можна зменшити значення *F*. Таким чином, в точках екстремума (мінімума) ***grad*** *F(x1, x2, … , xn, λ1, λ2, … , λm )* і ***grad*** *g(x1, x2, … , xn)* однонаправлені, тобто інша форма запису необхідних умов ектрему­ма:



*Приклад*. *Знайти мінімум функції z(x1,x2)=6 - 4x1-3x2 якщо змінні x1 і x2 задовільняють умову* *x12-x22=1.*

*Розв’язок.*

Складаємо функцію Лагранжа

*F(x1, x2, λ)=6 - 4x1-3x2 -λ( x12-x22-1).*

Необхідні умови екстремума утворюють систему рівнянь



розв’язками якого є *λ(1*)=5/2, *x1(1)* = 4/5, *x2(1)* = 3/5; *λ(2)*=-5/2, *x1(2)* = --4/5, *x2(1)* = -3/5. Значення функції в цих точках *z(x1(1), x2(1))*=1, *z(x1(2),x2(2))*=11. Отже, *z\** = *min z(x1,x2)* *= z(x1(1), x2(1)) =* 1.

*ТЕМА 13. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ випуклого ПРОГРАМУВАННЯ.*

Задача випуклого програмування являються частинним випадком задачі нелінійного програмування, коли функції мети *z(xj)* та системи обмежень і *gi(xj)* є випуклими неперервно-диференційованими функціями. В такому випадку система обмежень визначає де-яку випуклу область в n-вимірному векторному просторі, і задача випуклого програ­му­вання полягає в мінімізації випуклої функції і випуклої області.

Особливость випуклого програмування полягає в тому, що в задачі випуклого програмування локальний мінімум співпадає з глобальнимю

В терії випуклого програмування центральне місце займає теорема про сідлову точку, яка являє собою узагальнений класичний метод множників Лагранжа для визначення екстремума при наявності обмежуючих умов у випадку, коли останні є не тільки рівняннями, але й нерівностями.

Розглянемо задачу випуклого програмування



при наявності обмежень

.

Вимога невід’ємності керованих змінних зберігається.

*xj*≥ 0, *(j = 1, … , n)*

***x****(x1, x2, … ,xn)∈ G ⊂ Rn ,*

*z(xj)* і *gi(xj) –* випуклі функції,

*G* – випуклий замкнутий простір.

**Означення 1 .** Множина розв’язків задачі опуклого програму­вання задовольняє умови регулярності (умови Слейтера), якщо існує, по крайній мірі, одна точка *(x1, x2, … , xn) -* множини G така, що умови системи обмежень (123) виконюються як строгі нерівності, тобто точка *(x1, x2, … , xn)* – внутрішня точкаобласті G.

*bi – gi(**) > 0.*

**Означення 2.** Точка (***x0 , λo****)* називається сідловою точкою функції Лагранжа задачі випуклого програмування, якщо

*F*(***x0 , λ****)≤ F*(***x0 , λo****)≤ F*(***x, λo****).* (126)

Справедлива теорема Куна-Таккера.

**Теорема.** Вектор ***x0*** являється розв’язком задачі випуклого програмування, яка задовольняє умови Слейтора, в тому і тільки в тому випадку, якщо існує ненульовий вектор ***λ****o(λ01, λ02, … , λ0m),* *λ0i≥ 0, i=1, …,m* такий, що точка (***x0 , λo****)* – сідлова точка функції Лагранжа.

Аналітичні умови, які визначають сідлову точку за умови, що функції *z(xj)* та системи обмежень і *gi(xj)* неперервно диференційовані, мають вигляд:



 і  - значення існуючих частинних похідних функції Лагранжа в сідловій точці.

В загальному випадку задачу нелінійного програмування розв’язати не вдаєтьсяю Теорема Куна-Теккера теоретично дозволяє перейти від задачі випуклого програмування до задачі пошуку сідлової точки функції Лагранжа *F*(***x, λ****)* на множині, заданій простими обмеженнями, які включають умови невідємності *λi* і приналежності ***x0***до множини G).

*Приклад*.

*Використовуючи теоерему Куна-Теккера розв’язати задачу.*

*z(x1,x2)= x1+x2→ min ,*

*g1 = x12+x22-18 ≤ 0,*

*g2 = x1 ≤ 0.*

*Розв’язок.*

Складаємо функцію Лагранжа

*F(x*1*, x2, λ1, λ2)= z(x1, x2)+ λ1g*1*(x1, x2)+ λ2g2(x1, x2),*

*F(x1, x2, λ1, λ2)= z(x1, x2)+ λ1(x12+x22-18)+ λ2x1.*

Необхідні умови екстремума (127-132)



або



Нехай *x*1*2+x*22*=*18тоді λ1≥0 (зі (5\*)). Із умов (4\*) і (6\*) слідує λ2=0, x1<0. Із (1\*) і (2\*) одержуємо



або

2*λ1(x1+x2)* = 0.

Так як *λ1≠0 (λ2=0)*, то *x*1 = *x*2 і 2*x1*2 = 18, *x*1,2 = ±3. Врахувавши (4\*) і (2\*) *x*1 = *x*2 = -3, *λ1* =1/6. Точка мінімума ***x\** =** (-3;-3), ***λ\** =** (1/6; 0) є сідловою точкою функції Лагранжа.

### Загальний висновок за темою лекції

1. Організувати сукупність дій, необхідних для розв’язку задачі НЛП
2. Розібрати методи для розв’язку НЛП.

**Питання і завдання студентам для контролю знань.**

1. Загальна характеристика нелінійних задач і методів їх розв'язування.
2. Метод Лагранжа.
3. Теорема Куна-Теккера.

**Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)