|  |  |
| --- | --- |
| **UNBIZ1957с** | **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  **ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА**  **ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ФІНАНСАМИ ТА БІЗНЕСУ**  **ЗАТВЕРДЖЕНО**  **на засіданні кафедри цифрової економіки**  **та бізнес-аналітики**  **протокол № 6 від “21” січня 2020 р.**  **Зав. кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шевчук І.Б.**  (підпис)  **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  **З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**  **Дослідження операцій**  (назва навчальної дисципліни)  **галузь знань:** 05 «Соціальні та поведінкові науки»  (шифр та найменування галузі знань)  **спеціальність:** 051 “Економіка”  (код та найменування спеціальності)  **спеціалізація:** \_\_ \_Інформаційні технології в бізнесі\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (найменування спеціалізації)  **освітній ступінь:** бакалавр  (бакалавр/магістр)    **Укладач:**  Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент  (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)  **ЛЬВІВ 2020** |
| ***КАФЕдра цифрової економіки та бізнес-аналітики*** |

**Конспект лекції № 5**

Тема № 5. Елементи динамічного та стохастичного програмування

**Міжпредметні зв’язки:** Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Теорія випадкових процесів” та „Інформатика”.

**Мета лекції:** познайомити з методами розв’язку задач динамічного та стохастичного програмування.

### План лекції

1. Загальна характеристика задач динамічного програмування і методів їх розв'язування.
2. Загальна характеристика задач стохастичного програмування і методів їх розв'язування.

**Опорні поняття:** методи розв’язку задач динамічного та стохастичного програмування, методи знаходження початкового розв’язку, критерій оптимальності.

**Інформаційні джерела:**

Основна та допоміжна література:

1. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.
2. Дослідження операцій: Підручник, у 2-х томах. Том 1. – ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2015.
3. Зайченко Ю.П., Шумилов С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища школа, 1984.
4. Пономаренко Л.А. Основи економічної кібернетики. Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2012.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. – М.: Изд-во БЕК, 2002.
6. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д., Семьонов Д.Є. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2014.

**Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо:** ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

## ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

**задачі динамічного та стохастичного програмування**

ТЕМА 17. ЗАДАЧІ динамічного програмування .

Динамічне програмування пристосоване до операцій, в яких процес прийняття рішень можна розбити на низку послідовних кроків (етапів). Такі операції називаються *багатокроковими.*

Суть методу динамічного програмування полягає в заміні однієї задачі з багатьма змінними низкою послідовно розв'язу­ваних задач з суттєво меншим числом змінних. У цьому випадку зберігається основ­ний принцип Динамічне програмування: поетапне планування по­винно проводитися так, щоб під час планування кожного кроку враховувались вигоди не лише дано­го кроку, а процесу в цілому. Розглянемо поста­новку і метод розв'язу­вання задачі Динамічне програмування на простих прикладах.

*Приклад. Нехай маємо деяку кількість товарів, які потрібно розділити між двома крамницями протягом року так, щоб одержати максимальний прибуток.*

🗹 *Розв’язок.*Позначимо через *х*1 кількість товарів, доставлених у першу крамницю в першому кварталі. Прибуток від реалізації цих товарів нехай складає *f1*(*x1*)*.* Другій крамниці доставлено *x2 = b - x1* това­рів, від реалізації яких одержано прибуток *f2*(*x2*). До кінця кварталу в крамницях залишається, відповідно, *α1x1* і . *α2x2* нереалізованих това­рів. (0*≤ α1, α2≤* 1)*.* Загальний прибуток крамниць за перший квартал ста­новить:

*z1=f1*(*x1*)*+f2*(*x2*).

Процес розподілу товарів між крамницями проводимо для друго­го, третього і четвертого кварталів, до того ж на початку кожного квар­талу товари, що залишилися, наново розподідяються між двома крамни­цями. Повний прибуток за рік становить

*z1= f1*(*x1*)*+f*2(*x2*)*+..*.+ *f2*(*x2*)*.*

Обмеження задачі матимуть вигляд:

І квартал *x1+x2* = *b*

II квартал *x3+x4 = α1 x1+ α2 x2*

III квартал *x5+x6 = α3 x3+ α4 x4*

IV квартал *x7+x8 = α5 x5+ α6 x6*

Додаючи ці рівняння, матимемо

(1*-α1*)*x1+*(1*-α2*)*x2+…+* (1*-α6*)*x6+ x7 + x8 = b.*

Увівши позначення

(1*-αj* ) = *aj, j=*1*,…,*6

і врахувавши те, що, в загальному випадку, кількість доставлених това­рів не перевищує *b*, запишемо обмеження задачі:



де *a7* і *а8*  дорівнюють 1, а *хj* =1,… , *n*.

Отже, задачу розподілу товарів між магазинами можна записати так: знайти



за обмежень

 де *xj=*1, … , *n*.

Оскільки всі змінні *xj* і функції *fj*(*xj)* рівноправні, то розв'язування задачі можна подати, як процес *п* -крокового програмування, де *п =* 8 .

*Приклад.* *Знайти max z = 2x1 + Зх2 + x3 за обмежень 2х1+4x2+5x3≤ 10, де x1 x2 x3 - невід'ємні та цілочисельні*.

Зауважимо, що використання в якості функцій *fj*(*xj*) лінійяих фун­кцій не заважає виявленню основних особливостей методу динамічного програмування оскільки в процесі прийняття рішення потрібно лише враховувати значення цих функцій для заданих цілих значень *хj*, що зав­жди можна робити для функцій практично будь-якого вигляду.

Метод динамічного програмування є спрямованим перебором можливих ситуацій, до того ж перебором, який починається з кінця і просувається до початку, а тоді в зворотному напрямку. Рух починаєть­ся з кінця тому, що тільки останній крок можна планувати так, щоб він приносив максимальну вигоду. Але стан, з якого починається останній крок, невідомий, і тому потрібно розглядати всі можливі варіанти.

У нашій задачі останнім кроком вважаємо вибір величини *х3.* З обмеження випливає, що *х3* може приймати тільки три значення: *х3* = 0 , *х3=*1, *х3=* 2*.* Якщо *х3* = 0 , то *х2* може приймати значення *х2* =0, *х2* =1, *x2*=2; якщо *х3* =1, то *х2* =0 або *х2* =1, і, нарешті, якщо *х3* =2 , то маємо лише *х2*=0. Аналогічно можна розглядати всі варіанти значень *х1* за фіксова­них *х3* і *х2.* Зручно подати всі варіанти у вигляді наступної схеми

**





На цьому закінчується рух від кінця до початку процесу і почи­нається обернений рух, під час якого на кожному кроці ви­значається значення функції мети. Такий рух також подано у вигляді схеми



Нарешті знаходимо максимум функції мети

**** за х1,=5, х2 = х, = 0.

На цьому розв'язання задачі закінчується. Розглянутий обчислю­вальний метод ДП має як низку пере­ваг, так і недоліків. До переваг належить те, що в якості функції можна використовувати нелінійні функції, змінні є цілочисельними, а у разі розв'язування задачі знизу знаходяться всі оптимальні розв'язки якщо їх декілька. До недоліків методу треба віднести, передовсім, дуже великий об'єм обчислень для задач значного розміру.

ТЕМА 18. ЗАДАЧІ стохастичного програмування .

🗹 ***Економічна постановка та математична модель задачі.***

Задача стохастичного програмування полягають в знаходженні ектремальних значень функції мети (4.1) для системи обмежень (4.2) та гранично допустими значеннями змінних (4.3)

*z = c0+c1x1+c2x2+…+cnxn* → max(min) (4.1)

 (4.2)

*ds≤ xs ≤ ls* ,(*xs≥* 0) *(s =*1, … , *n*) (4.3)

При оптимальному плануванні на основі умови (4.1) – (4.3) необхідно мати значення параметрів *ci, aij , bj , di , ei* (*i* = 1, … , *n* ; *j* = 1, … , *m*), які входять в задачу. В практичних розрахунках приймають, що всі ці величини є детерміновані, тобто їх задані значення не залежать від випадкових факторів. Однак насправді тільки параметри *di* і *ei* , які вста­но­влюють гранично допустимі значення *xj* , за змістом будуть детермі­новані, решту параметрів *ci, aij , bj* – випадкові величини.

Наприклад, об’єм запасів сировини залежить від термінів та обсягів поставки, запаси виробничих потужностей залежать від надійно­сті обладнання, робочої сили – працездатності працюючих. Тому, є усі підстави вважати, що величина запасів  *bj* – випадкова величина. Анало­гічні твердження відносяться і до параметрів *ci* та *aij* . Таким чином, в загальному випадку параметри *ci, aij , bj*  задачі лінійного програмування (4.1)-(4.3) по своїй суті є прийняттям рішення в умовах випадкових значень цих значень.

Задачу (4.1)-(4.3) з випадковими параметрами звичайно назива­ють задачею стохастичного програмування. Для її розв’язування необ­хідно мати опис випадкової величини. З точки зору повноти опису вмпадкової величини розглянемо два випадки:

* відомі тільки діапазони, в яких можуть змінюватися випадкові величини. Такі задачі називаються задачами планування при повній невизначенності;
* відомі закони розподілу випадкових величин. Такі задачі називаються задачами планування в умовах ризику.

При плануванні в умовах повної невизначенності вважаємо, що на основі аналізу попередніх періодів і характеру виробництва вдається встановити для кожного з випадкових парамеирів задачі (4.1)-(4.3) діапазони їх можливої зміни в плановому періоді:

*min*(*ci*) ≤ *ci ≤ max*(*ci*),

*min*(*aij*) ≤ *aij ≤ max*(*aij*), (4.4)

*min*(*bj*) ≤ *bj ≤ max*(*bj*).

Розрахуємо план двох крайніх випадків. Гіршим (песимістичним) буде такий план, в якому ресурси, які наявні у підприємства, приймаємо найменшими *min* *bj* , а їх розхід – найбільшим max *aij*. Очікуваний прибуток від реалізації кожного виробу буде знаходитися на нижній границі *ci*. Підставимо ці граничні значення параметрів у модель (4.1) – (4.2) і одержимо песимістичний план виробництва *min xi* (i=1, … , n), виконання якого гарантовано, але з найнижчим економічним ефектом.

Кращим (оптимістичним) буде такий план, в якому ресурси, що наявні на виробництві, приймаємо найбільшим *max bj* ,a їх розхід - найменшим *min* *a*ij і прибуток від реалізації кожного виробу найбільшим *max* *сi*.

Розв’язавши задачу лінійного програмування (4.1)–(4.2) при цих значеннях параметрів, знайдемо оптимальний план виробництва *max xi*, який дасть найбільший економічний ефект, але виконання якого не гарантовано. Зауважимо, що задача в песимістичній постановці дуже часто може виявитися несумісною.

Перейдемо до постановки задачі для другого випадку. Нагадаємо, що якщо неперервна випадкова величина Y задана функцією розподілу ймовірностей *F*(*y*), то ймовірність появи випадкової величини в межах від *a* до *b* рівна:

*P*(*a <Y< b*) *= F*(*b*)*-F*(*a*). (4.5)

Якщо випадкова величина Y підпорядкована нормальному закону розподілу, то значення функції розподілу густини ймовірностей в (4.5) буде мати вигляд

де

- нормальна функція розподілу, *M*(*Y*), *σ*(*Y*) – відповідно математичне сподівання та середньоквадратичне відхилен­ня випадкової величини *Y*. Задача з ймовірносними обмеженнями може мати чотири випадки постановки:

a).Визначити

*P(Y< 0)≥ α , (0≤ α ≤ 1)*, (4.6)

тобто визначити такі параметри нормального закону розподілу, при яких буде виконуватися умова (4.6) для деякого заданого α. В загально­му випадку така задача не має однозначного розв’язку. Можна обчисли­ти ймовірність

*P*(*Y< 0*) *= P*(*-∞ <Y< 0*) *= F*(*b*)*-F*(*a*) *= Φ\**(0) *- Φ\**(*-∞*) *= Φ\**(0)*,*

 де .

Таким чином, *P(Y<* 0*) = .*

Враховуючи (4.6), маємо , тоді ,

де *Φ*\*-1(α) – обернена функція нормального розподілу.

Увівши позначення τα = Φ\*-1(α)

запишемо

. (4.7)

Отже, умова (4.6) буде виконуватися при будь-яких значенях математичних сподівань  і середніх квадратичних відхилень σ, пов’язаних співвідношенням (4.7).

б). Визначити

*P*(*Y<* 0)*≤ α ,* (0*≤ α ≤* 1)*.* (4.8)

Знаходимо значення математичного сподівання

. (4.9)

в). Визначимо

*P*(*Y >* 0)*≥ α ,*  (0*≤ α ≤* 1)*.* (4.10)

Тоді знаходимо значення математичного сподівання

. (4.11)

г). Для

*P*(*Y > 0*)*≤ α ,* (0*≤ α ≤* 1)*.* (4.12)

Тоді знаходимо значення математичного сподівання

. (4.13)

🗹 ***Математична модель стохастичного програмування при ймовірностних обмежень.***

Задача лінійного програмування, як відомо, включає в себе цільову функцію і граничні умови. Граничні умови *di , ei* будемо вважа­ти детермінованими, що відповідає звичайним умовам на практиці. Почнемо з цільової функції  *ci* – випадкові вели­чи­ни. Тоді приймається оптимізація математичного очікування цільової функції що можна записати наступним чином:

** (4.14)

де - математичне сподівання випадкової величини *ci*.

Розглянемо тепер обмеження. В задачі стохастичного програму­ван­ня можливі наступні варіанти обмежень:

, (4.15)

, (4.16)

, (4.17)

, (4.18)

де *aij* , *bj* – випадкові величини; αj – задані рівні ймовірності.

Позначимо

 (4.19)

де *yi* – випадкова величина.

Як правило, приймають, що випадкові величини *ci*, *aij*, *bj*, *yj* підпо­рядковані нормальному закону розподілу з відомими першими момен­тами: математичним сподіванням і дисперсією, що відповідних позна­ченнях приведено в наступній таблиці:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Випадкова величина. | Математичне сподівання. | Дисперсія. |
| *ci* |  | σi2 |
| aij |  | σij2 |
| bj |  | θj2 |
| yj |  | σуi2 |

Підставивши (4.19) в (4.15-4.18), одержимо наступні варіанти задач:

, (а)

, (б)(4.20)

, (в)

 (г)

Доведено, що випадкова величина (4.19) при незалежних *bj* і *aij* буде мати математичне сподівання:

 (4.21)

і дисперсію

. (4.22)

Підставивши ці значення в залежність (155), тоді для випадку а). маємо (4.20,а) маємо

. (4.23)

Підставивши сюди значення (4.21), (4.22), тоді

,

або, перетворивши, маємо

. (4.24)

Якщо обмеження в задачі стохастичного програмування (4.24) порівняти з аналогічними обмеженнями задачі лінійного програмування

, то побачимо, що обмеження (4.24) відрізняються двома ознаками:

1. виконаний перехід від детермінованих значень *aij*, *bj* до математи­чних сподівань випадкових величин , ;
2. з’явився додатковий член

, (4.25)

який враховує усі ймовірносні характеристики задачі.

Використовуючи позначення (4.25) співвідношення (4.24) запи­шемо так:

 (4.26)

Залежність (4.26) представляє собою детермінований еквівалент задачі з ймовірносними обмеженнями (4.20). Аналогічні детерміновані еквіва­ленти можна одержати для решти варіантів (4.20).

### Загальний висновок за темою лекції

1. Організувати сукупність дій, необхідних для розв’язку задачі ДСП
2. Розібрати методи для розв’язку ДСП.

**Питання і завдання студентам для контролю знань.**

1. Загальна характеристика задач динамічного програмування.
2. Загальна характеристика задач стохастичного програмування.

**Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)