**Конспект лекції № 4**

Тема № 4. Задача цілочислового лінійного програмування

**Міжпредметні зв’язки:** Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Теорія випадкових процесів” та „Інформатика”.

**Мета лекції:** познайомити з методами розв’язку задач цілочисельного програмування..

### План лекції

1. Загальна характеристика цілочисельних задач і методів їх розв'язування.
2. Метод Гомморі.
3. Метод гілок і границь.

**Опорні поняття:** методи розв’язку задач цілочисельного програмування, методи знаходження початкового розв’язку, критерій оптимальності.

**Інформаційні джерела:**

Основна та допоміжна література:

1. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.
2. Дослідження операцій: Підручник, у 2-х томах. Том 1. – ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2015.
3. Зайченко Ю.П., Шумилов С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища школа, 1984.
4. Пономаренко Л.А. Основи економічної кібернетики. Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2012.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. – М.: Изд-во БЕК, 2002.
6. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д., Семьонов Д.Є. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2014.

**Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо:** ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

## ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

**задачі цілочисельного програмування**

**1. Загальна характеристика цілочисельних задач і методів їх розв'язування.**

Значне місце в застосуваннях займають задачі математичного програмування, на змінні яких накладено умови цілочисельності. Необхідність цієї умови стане зрозумілою, коли згадати, що багато видів ресурсів виробництва можуть бути визначені кількісно лише цілими числами: люди, літаки, машини, верстати і тощо. Умова цілочисельності є по суті нелінійною і може бути в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. Взагалі кажучи, вимога цілочисельності може бути накладена лише на частину змінних, проте такі задачі тут ми не розглядатимемо.

У цьому розділі розглянемо коротко так звані цілочисельні лінійні задачі, тобто, крім вимоги цілочисельності, усі обмеження і функція мети мають лінійний вигляд.

Здавалося б на перший погляд, що для таких задач цілочисельний розв'язок можна знайти, округливши знайдений розв'язок відповідної лінійної задачі, утвореної з заданої відкиданням умови цілочисельності. Слід зазначити, що таким способом побудований план часто дуже далекий від оптимального.

*На практиці зустрічаються задачі, в яких економічний зміст мають лише оптимальні розв'язки з цілими числами. Ці міркування приводять нас до нового класу задач: задач цілочисельного програму­вання. Загальна постановка такої задачі полягає в наступному: знайти*

 *(2.133)*

*при обмеженнях*

,

. . . . . . . . . . . . . . . (2.134)

;

;

*Необхідність цілочисельних розв’язків додає ще одне обмеження:*

xj*≥0,* xj*= 1,2,3, … (2.135)*

З відомих задач, в яких змінні можуть приймати тільки цілочи­сельні значення , можна розглядати задачі про використання сировини, засобів виробництва, транспортування, які вигідніше використовувати окремими партіями.

Очевидно, що задача цілочисельного програмування буде складнішою, ніж задача лінійного програмування, оскільки вона включає в себе додаткову умову (2.135). Тому оптимальне значення задачі (2.134), не більше, ніж відповідної задачі без умови цілочисельності. Якщо оптимальний розв'язок вихідної задачі виражається в цілих числах, то цей розв'язок буде одночасно і розв'язком задачі цілочи­сельного програ­мування. В протилежному випадку випадкурозв'язок може бути одержаний з допомогою заокруглення, але він не завжди буває оптималь­ним.

Методи цілочисельної оптимізації можна розділити на три основні групи: а) методи відсічення; б) комбінаторні методи; в) наближені методи.

Розглянемо детально, як шукається розв'язок задач цілочиселього про­грамування, в яких всі змінні цілочисельні, методом відсічення пло­щин, або як його щe називають методом Гоморрі.

**3.Метод Гомморі.**

Пригадаємо критерій цілочисельності.

**Означення.** Цілою частиною числа *а* називать найбільше ціле число, менше або рівнейому,(позначають [a]).

-1,3 10/3 ***x***

-2 0 2 4 6

Рис.9

[10/3]=3 [6]=6 [-1,3]= -2

Дробовою частиною числа *а* називають різніцю між *а* його цілою частиною, (позначають *f*(*а*)).

*f*(*a*) = *а* - [*а*]. (2.135)

Наприклад: *f*(3,3) = 3,3 - 3 = 0,3; *f*(-1,3) = -1,3 - (-2) = 0,7; *f*(6) = 6-6 = 0. Очевидно *f(a)≥0*, причому *f(a)=0* тоді і тільки тоді, коли *а* ціле число. Для дробової частини числа можна записати такі властивості:

1°.*f*(*a+b*) ≤ *f*(*a*)+*f*(*b*);

2°.*f*(*n⋅a*) ≤ *n*⋅*f*(*a*), де *n* ≥ 0 – ціле число. (2.136)

Властивості 1° та 2° можна перевірити на числових прикладах:

*f*(-2/3+5/3) = 0, *f*(-2/3) + *f*(5/3) = 1/3 + 2/3 = 1.

У вигляді рівності співвідношення 1° та 2° можна записати тільки для цілих додатніх чисел *a*, *b* і *n*,

*f*(*a+b*) = *f*(*a*) + *f*(*b*);

*f*(*n*⋅*a*) = *n*⋅*f*(*a*). (2.137)

Для обмеження задачі (2.133), (2.134) властивості 1°, 2° дозволяють записати нерівність

 (2.138)

яку називають нерівністю Гоморрі і яка відіграє важливу роль в методі Гоморрі знаходження цілочисельних розв'язків. Наприклад, обмеження задачі, що має вигляд 3,5*x*1 - 2,1*x*2 + 0,8*x*3 - *x*4 = 0,5. Нерівність Гоморрі перетворює його в інше обмеження: *f*(3,5*x*1 - 2,1*x*2 + 0,8*x*3 - x4) = 0,5*x*1 + 0,9*x*2 + 0,8*x*3 - *x*4 ≥ 0,5.

Розв’язок задачі цілочисельного програмування методом Гоморрі може бути представлений у такій послідовності:

1).Знайдемо розв'язок задачі (2.133), (2.134) без умови цілочисельності.

2).Якщо оптимальний план цілочисельний, то задача розв'язана. В про­тилежному випадку вибираємо базисну змінну з найбільшою дробо­вою частиною і за обмеженням цієї базисної невідомої складаємо нерів­ність Гоморрі.

3).До обмежень задачі додаємо додаткове обмеження з пункту 2 (нерівність Гоморрі), розв'язуємо розширену задачу 3 повертаємось до кроку 1. Процес повторюємо до тих пір, поки розв'язок не буде ціло­чисельний або симплекс-таблиці не покажуть, що задача не має розв'язку. Більш детально весь процес методу розглянемо на такому прикладі:

*Приклад*.

*Виділено 20 тис.крб. на придбання обладнання для нової виробни­чої дільниці, яке може бути розміщено на площі, не більшій ніж 38 м2. Підприємство може замовити обладнання двох типів А- та В з даними: А - вартість 5 тис.крб.; вимагає площу 8м2, випускає 7 тис.од. продукції за зміну; В - відповідно – 2 тис.крб.;* ***-*** *4м2**;* ***-*** *3 тис.од. Необхідно розрахувати оптимальний варіант придбання обладнання, який би забезпечив максимальний прибуток.*

*Розв’язання.* Позначимо через *x*1 *-* кількість одиниць обладнання А, *x*2 - В, тоді математична модель задачі записується так: знайти

*z* = 7*x*1 + 3*x*2→max при обмеженнях

.

Записуємо канонічну форму задачі:

,

*z* = 7*x*1+3*x*2 = ⇒*z* -7*x*1 - 3*x*2 = 0→max,

і розв’язуємо її за допомогою симплекс-таблиць.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1↓ | *x*2 | *x*3 | *x*4 |
|  | 0 | *z* | 0 | -7 | -3 | 0 | 0 |
| І | 1 | *x*3 → | 20 | 5 | 2 | 1 | 0 |
|  | 2 | *x*4 | 38 | 8 | 4 | 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1 | *x*2 ↓ | *x*3 | *x*4 |
|  | 0 | *z* | 28 | 0 | -1/5 | 7/5 | 0 |
| ІI | 1 | *x*1 | 4 | 1 | 2/5 | 1/5 | 0 |
|  | 2 | *x*4 → | 6 | 0 | 4/5 | -8/5 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 |
|  | 0 | *z* | 59/2 | 0 | 0 | 1 | ¼ |
| ІII | 1 | *x*1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1/2 |
|  | 2 | *x*4 | 15/2 | 0 | 1 | -2 | 5/4 |

0стання симплекс–таблиця дає оптимальний план, але він не є ці­ло­­чи­сель­ний. Тому переходимо до пункту 2. Нецілочисельному плану відповідає обмеження *x*2 - 2*x*3 +5/4*x*4 = 15/2. Нерівність Гоморрi для нього має вигляд:

*f*(*x*2 - 2*x*3 + 5/4*x*4) = 1/4*x*4 ,

1/4*x*4 ≥ 1/2.

Додаємо обмеження Гоморрі до обмежень початкової задачі і розширену рдачу знову розв'язуємо симплекс–методом. Для зменшення обчислень дописуємо його до канонічної форми третьої симплекс-таблиці.



*z* = 59/2 - *x*3 -1/4*x*4→max.

Канонічну форму останньої задачі знайдемо двоїстим симплекс-методом.



*z* = 59/2 - *x*3 - 1/4*x*4→max.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 |
|  | 0 | *z* | 59/2 | 0 | 0 | 1 | ¼ | 0 |
| 1 | 1 | *x*1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ½ | 0 |
|  | 2 | *x*2 | 15/2 | 0 | 1 | -2 | 5/4 | 0 |
|  | 3 | *x5* | -1/2 | 0 | 0 | 0 | -1/4 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 |
|  | 0 | *x0* | 29 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | *x*1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
|  | 2 | *x*2 | 5 | 0 | 1 | -2 | 0 | 5 |
|  | 3 | *x5* | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | -4 |

Оскільки в нульовому рядку 2-ої симплекс–таблиці немає від'ємних чисел, то план оптимальний, крім того він цілочисельний.

*X* = (2,5,0,2,0), *z(*max) = 29.

В даному прикладі оптимальне значення могло бути одержано і а допо­мо­гою заокруглення (проте просте заокруглення дає значення – *х*1=1; *x*2 = 7; *z* = 7 + 3 + 7 = 28).

Обмеженість застосування методу Гоморрі, як вже говорилося раніше, полягає в тому, що всі змінні повинні бути цілочисельними. Крім того, для досягнення цілочисельності нерідко доводиться декілька разів повертатися до вихідної задачі (пункту 1), що в свою чергу зв'язано з великою кількістю обчислень.

З методів цілочисельного програмування, які накладають умову цілочисельності на частину змінних, найбільш поширеним е метод віток і границь, по якому з деякої множини задач лінійного програмування за певними правилами вибирається одна і розв'язується до тих пір, поки потрібний розв'язок не буде знайдений. Крім того є ряд наближених методів знаходження цілочисельних розв'язків.

### Загальний висновок за темою лекції

1. Організувати сукупність дій, необхідних для розв’язку транспортної задачі
2. Розібрати методи для розв’язку транспортних задач.

**Питання і завдання студентам для контролю знань.**

1. Загальна характеристика цілочисельних задач і методів їх розв'язування.
2. Метод Гомморі.
3. Метод гілок і границь.

**Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)