**Конспект лекції № 2**

Тема № 2. Загальна задача лінійного програмування та методи її розв’язування

**Міжпредметні зв’язки:** Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Теорія випадкових процесів” та „Інформатика”.

**Мета лекції:** познайомити з методами розв’язку задач лінійного програмування (симплекс метод та пошук рішення).

### План лекції

1. Загальною формою задачі.
2. Властивості загальної форми задачі.
3. Система обмежень та цільова функція.
4. Графічні форми загальної задачі.

**Опорні поняття:** загальна форма, симплекс метод, система обмежень, цільова функція.

**Інформаційні джерела:**

Основна та допоміжна література:

1. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.
2. Дослідження операцій: Підручник, у 2-х томах. Том 1. – ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2015.
3. Зайченко Ю.П., Шумилов С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища школа, 1984.
4. Пономаренко Л.А. Основи економічної кібернетики. Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2012.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. – М.: Изд-во БЕК, 2002.
6. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д., Семьонов Д.Є. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2014.

**Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо:** ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

## ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

**Симплексний метод розв’язку задач лінійного програмування.**

1**. Канонічна форма задачі лінійного програмування**

Загальна форма задачі лінійного програмування (2.30) – (2.36) не при­датна для побудови досить простих і ефективних методів її розв'я­зування, наприклад симплекс-метод. Тому, як правило, задачу зводять до каноніч­ної форми.

Вважають, що задача лінійного програмування записана в канонічній формі, якщо вона має вигляд.

 (2.43)

,

. . . . . . . . . . . . . . . (2.44)

,

. (2.45)

Щоб перевести задачу лінійного програмування з загальної форми (2.30-2.36) до канонічної форми (2.43-2.45) необхідно зробити наступні кроки.

1*-й крок*. До кожної лівої частини нерівностей (2.32) дода­ємо нову невід'ємну невідому змінну  , яка дорівнює:

, (2.46)

а в нерівностях (2.33) дорівнює:

 . (2.47)

Тоді група нерівностей (2.32) і (2.33) перетвориться на рівняння.

Введені нові змінні, , … , будемо вважати базисними, а змінні , … ,- вільними.

Залишаючи незмінними обмеження групи (2.31), дістаємо однорідну систему основних обмежень задачі:

,

. . . . . . . . . . . . . . .

;

,

. . . . . . . . . . . . . . .

;

, (2.48)

. . . . . . . . . . . . . . .

;

2*-й крок* полягає у зведенні до однорідної системи обмежень на знак. Умови недодатності (2.35) легко перетворюються в умови невід’єм­но­сті за допомогою заміни змінних

. (2.49)

Змінну, на знак якої не накладено обмежень, подають у вигляді різниці двох невід’ємних змінних:

, де . (2.50)

Ранг сумісної системи обмежень (2.44) *r* можна вважати таким, що дорівнює *m*, оскільки в іншому разі частину, а саме *m-r*=*k* рівнянь треба було б відкинути, бо вони були б лінійними комбінаціями *r* базисних рівнянь. Однак на практиці інколи такі зайві рівняння можуть включати в систему обмежень на стадії формування реальної задачі. Такі обмеження називають *неістотними* і їх відкидають, що звичайно відбувається при побудові довільного базисного розв'язку системи рівнянь (2.40). Отже, знайти множину планів задачі – означає знайти множину невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь (2.40).

**Означення.**

Задачу лінійного програмування вважають записаною у формі, якщо вона задовольняє такі умови:

1.Система обмежень зведена до системи рівнянь виду (2.40).

2.Система рівнянь зображена в такому вигляді, де кожна базисна невідома входить тільки в одне рівняння системи з коефіцієнтом рівним одиниці, при чому немає рівнянь, в які не входила хоча б одна базисна невідома. Якщо деякі рівняння системи поміняти місцями так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то базисний мінор в цьому випадку складає одиничну матрицю.

3. Вільні члени системи обмежень невід'ємні;

4. Оптимізуюча форма залежить тільки від вільних невідомих.

Таким чином для того, щоб задачу лінійного програ­мування можна було розв'язувати симплексним методом потрібно загальну форму (2.30-2.37) звес­ти до канонічної форми. Іншими словами її потрібно певним спосо­бом записати в такій формі, щоб система рівнянь була з базисом.

 (2.51)

, . . . . . . . . . . . . . (2.52)

;

;

Для того, щоб базисний план системи обмежень (2.52) був *опор­ним* необхідно і достатньо, щоб всі вільні члени (2.52) були невід’ємні. Таким чином, щоб звести задачу до канонічної форми потрібно так піді­брати базисні невідомі, щоб в загальному розв'язку системи обмежень не було від'ємних вільних членів.

**2.Симплекс-таблиці та способи роботи з ними.**

Розглянемо правила роботи з симплекс-таблицями на прикладі.

*Для виготовлення двох видів продукції П1 і П2 використовують два види сировини А1 і А2. Запаси сировини відповідно 12 і 4 одиниць, на виготовлення одиниці продукції П1 витрачають 2 одиниці сировини виду А1, і 2 одиниці виду А2, на виготовлення продукції виду П2 відповідно 3 та –1. Прибуток від реалізації одиниці продукції виду П1 становить 3 у.о, виду П2 – 2 у.о. Знайти розмір максимального прибутку одержаного при наявності даних запасів сировини.*

🗹 Розв’язок.

Позначимо кількість виготовленої продукції першого виду *П*1 через *x*1, другого – *x*2. Враховуючи витрати сировини першого виду *А*1 та другого *А*2 на виготовлення одиниці продукції видів *П*1 та *П*2, а також обмежені запаси сировини, запишемо систему обмежень (2.52). Прибуток, одержаний з виготовлення продукції у вигляді функції мети (2.53).

 (2.52)

 (2.53)

Зведемо задачу лінійного програмування (2.52, 2.53) до канонічної форми додавши невідомі *x*3 та *x*4 до лівої сторони двох нерівностей відповідно:

. (2.54)

Розв’язок системи рівнянь здійснимо методом Гаусса-Джордана, тому запишемо систему обмежень (2.54) у вигляді початкової розра­хунко­вої таблиці 1, яку назвемо *ітерацією I*.

Для знаходження початкового базового плану розділимо змінні на дві групи - базисні і вільні. Для вибору базисних змінних доцільно скористатися наступним правилом: в якості *базисних змінних* ітерації симплекс-таблиці необхідно вибрати такі змінні (їх кількість визначається числом основних обмежень), кожна з яких тільки раз входить в рівняння основних обмежень. Усі решта змінні будемо вважати вільними.

Запишемо цільову форму *z* вигляді рівняння

. (2.55)

Таблиця заповнюється формально по вибраній канонічній формі.

1. Заповнюємо базисні стовпчики: на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставимо 1, а в усіх інших клітинках будуть нулі.

2. В інших рядках виписуємо коефіцієнти, що стоять при відповід­них невідомих. Нульовий рядок відповідає оптимізуючій формі і він служить для визначення ступеня опти­мальності опорного плану.

Ітерація І.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x1*↓ | *x2* | *x3* | *x4* |
|  | 0 | *z* | 0 | -3 | -2 | 0 | 0 |
| І | 1 | *x3* | 12 | 2 | 3 | 1 | 0 |
|  | 2 | *x*4 → | 4 | 2 | -1 | 0 | 1 |

*Критерій оптимальності*. Якщо задача максимізується і в нульо­вому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком хіба що стовпчика "опорний розв'язок (план)"), то опорний план є оптимальним (при міні­мізації задачі для оптимальності плану достатньо відсутності додатних чисел у нульовому рядку, за винятком можливо опорного розв’язку).

Коефіцієнт рядка “0” можна інтерпретувати як приріст функції *z* при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємний - якщо коефіцієнт додатний.

В нашому випадку є два від'ємні числа (-3), (-2), беремо найбільше за модулем від’ємне число (-3) (при мінімізації задачі найбільше додатнє), тоді стовпчик “*x*1” будемо називати *ключовим стовпчиком*.

Для вибору *ключового* *елемента* складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика "опорний розв'язок") до відповідних додатних чисел ключового стовпчика (усі інші відношення будемо вважати рівними нескінченності ): 1) 12:2=6; 2) 4:2=2.

Друге відношення менше, тому число (2) другого рядка буде клю­чо­вим елементом. Ключовий елемент в таблиці позначаємо рамкою і перехо­ди­мо до другої ітерації.

***Ітерація ІІ.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1 | *x*2 ↓ | *x*3 | *x*4 |
|  | 0 | *z* | 6 | 0 | -7/2 | 0 | 3/2 |
| ІІ | 1 | *x3* → | 8 | 0 | 4 | 1 | -1 |
|  | 2 | *x1* | 2 | 1 | -1/2 | 0 | ½ |

Послідовність заповнення другої та наступних ітерацій така (вико­рис­товуємо метод Гаусса-Жордана):

1.Замість базисної невідомої *х*4 (ключовий рядок)*,* вводимо нову базисну невідому *х*1(невідому ключового стовпчика),

2.Формально заповнюємо базисні стовпчики (пункт 1 ітерації І).

3.Ключовий рядок одержуємо від ділення його елементів попередньої ітерації на ключовий елемент.

4.Усі інші комірки ітерації заповнюємо за правилом прямокутника:

 (2.56)

де *a*ij` , *b*i` відповідно шукані елементи нової ітерації, а *a*ij, *b*i – поперед­ньої, *a*qs – ключовий елемент.

Після заповнення II-ої ітерації перевіряємо її опорний план на опти­мальність. Бачимо, що нам потрібно перейти до наступного опор­ного плану, оскільки в нульовому рядку стовпчика "*х*2" знаходиться від'ємне число (-7/2). Відно­шення 8:4=2 (в другому рядку відношення рівне нескінченності, бо коефіцієнт (-1/2) від'ємний) вказує, що за ключовий елемент слід взяти число "4".

В ітерації III замість базисної змінної *х*3 тепер буде нова базисна *х*2*,* ключовим буде рядок 1. Над таблицею виконуємо ті ж операції, що й над другою ітерацією.

Ітерація ІІІ.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №ітерації | № рядка | Базисні невідомі | Опорний розв’язок | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 |
|  | 0 | *z* | 13 | 0 | 0 | 7/8 | 5/4 |
| ІІІ | 1 | *x*2 | 2 | 0 | 1 | ¼ | -1/4 |
|  | 2 | *x*1 | 3 | 1 | 0 | 1/8 | 3/8 |

Результати від операцій поміщаємо у відпо­від­них клітинках відповідно 1-го, 0-го, 2-го рядків ітерації ІІІ.

В рядку 0 вже немає від'ємних чисел, тому опорний план останньої таблиці оптимальний і виписуємо його із стовп­чика "опорний розв'язок"

 (2.57)

Зауваження 1. Кожній таблиці відповідає своя канонічна форма стандартного запису. Так, наприклад, за останньою таблицею можна записати таку канонічну форму:

,

, (2.58)

,

.

Зауваження 2. Контролювати правильність обчислення опорних планів і оптимального значення можна за значенням функції мети:

. (2.59)

Зауваження 3. При розв'язуванні задачі для зручності ітерації послі­дов­но записують одну під одною.

🕮 3.**Економічна інтерпретація математичного розв’язку.**

Використання симплекс таблиць формалізує розв’язок задач ліній­ного програмування, проте не пояснює економічної суті матема­тичних перетворень та одержаних розв’язків.

Виразимо з рівнянь (2.54, 2.55) базові невідомі *x3*та *x4* через вільні *x1*, *x2* невідомі та вільні члени.

 (2.60)

 (2.61)

Опорний розв’язок задачі (2.60, 2.61) (1) = ( *z*; *x*1, *x*2, *x*3, *x*4) = (0;0,0,12,4) визначає значення оптимізуючої функції *z*(1) = 0 (об’єми виго­то­вле­ної продукції видів *П*1 і *П*2 на першому етапі є нульовими, тому прибуток також відсутній).

Аналіз цільової функції *z* показує, що більше зростання прибутку забез­пе­чить виробництво продукції виду *П*1, тому на першому етапі по­кра­щувати план потрібно за рахунок виробництва продукції цього виду. Такий крок відповідає вибору ключового стовпчика в іте­раціїI. Запаси си­ро­вини обмежують максимальні об’єми виготовлен­ня продукції виду *П*1, тому вибір ключового рядка здійснюється, як *min*{12:2; 4:2}.Ключовий елемент визначається за двома крите­ріями: макси­мальним зростанням прибутку та обмеженістю запасів сиро­вини, і вказує, що вільна невідома *x*1стає базисною.

Виразимо з другого рівняння системи обмежень (2.60) базисну неві­дому *х*1 через вільні невідомі, і підставимо цей вираз у перше рівняння системи обмежень та цільову функцію, одержимо систему обме­­жень і функцію мети (2.62, 2.63).

 (2.62)

 (2.63)

Аналіз системи обмежень (2.62) і функції мети (2.63), при врахуванні того, що виробництво продукції виду *П*2 відсутнє (*x*2=0), а величина *x*4, яка визначає невикористану сировину виду *А*2 дорівнює нулю показує, що при виготовленні двох одиниць продукції виду *П*1 одержуємо прибу­ток рівний *z* = 6 одиниць. Проміжний розв’язок системи можна записати у вигляді (2) = (6; 2,0,8,0).

Проміжне значення цільової функції z(2) = 6, яке визначає прибуток перевищує z(1). Подальше збільшення прибутку можна досягти за рахунок виробни­цтва товару виду *П*2, але на об’єм не більший, ніж залишки запасів сиро­вини виду *А*1 (*x*3=8) min{8:4=2}. Такий вибір покращення опорного роз­в’язку відповідає вибору ключового елемента в ітерації ІІ. Розра­хуємо можливі об’єми виробництва товару виду *П*2. Вира­зимо з першого рівняння системи обмежень *x*2 і підставимо в друге рівня­ння та цільову функцію.

 (2.64)

 (2.65)

Аналіз системи обмежень (2.64) і цільової функції (2.65) показує , що подальше збільшення прибутку неможливе, розв’язок (3) = (13; 3,2,0,0) є оптимальний, найбільший прибуток при даних запасах сирови­ни стано­вить zma*x*=13 одиниць, а об’єми виготовленої продукції видів *П*1 і *П*2 відповід­но 3 та 2 одиниці.

### Загальний висновок за темою лекції

1. Організувати сукупність дій, необхідних для розв’язку задачі симплекс методом: визначити змінні і константи, побудувати цільову функцію та систему обмежень
2. Розібрати симплекс метод для розв’язку задач дослідження операцій.

**Питання і завдання студентам для контролю знань.**

1. Що таке симплекс метод?
2. Які ви знаєте властивості ЗДО?
3. Що таке ітерація?
4. Що таке цільова функція?
5. Що таке розв’язувальний елемент?

**Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)