|  |  |
| --- | --- |
| **UNBIZ1957с** | **МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ****ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА****ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ФІНАНСАМИ ТА БІЗНЕСУ****ЗАТВЕРДЖЕНО****на засіданні кафедри цифрової економіки** **та бізнес-аналітики****протокол № 6 від “21” січня 2020 р.****Зав. кафедри \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шевчук І.Б.** (підпис)**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ****З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ** **Дослідження операцій** (назва навчальної дисципліни)**галузь знань:** 05 «Соціальні та поведінкові науки»  (шифр та найменування галузі знань)**спеціальність:** 051 “Економіка”  (код та найменування спеціальності)**спеціалізація:** \_\_ \_Інформаційні технології в бізнесі\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (найменування спеціалізації)**освітній ступінь:** бакалавр  (бакалавр/магістр) **Укладач:**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент  (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)**ЛЬВІВ 2020** |
| ***КАФЕдра цифрової економіки та бізнес-аналітики*** |

**Конспект лекції № 1**

Тема № 1. Постановка загальної задачі дослідження операцій.

**Міжпредметні зв’язки:** Зв’язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як „Теорія випадкових процесів” та „Інформатика”.

**Мета лекції:** познайомити з поняттям загальної форми задачі, її властивостями та способами побудови.

### План лекції

1. Загальною формою задачі.
2. Властивості загальної форми задачі.
3. Система обмежень та цільова функція.
4. Графічні форми загальної задачі.

**Опорні поняття:** загальна форма, система обмежень, цільова функція, графічна форма задачі дослідження операцій.

**Інформаційні джерела:**

Основна та допоміжна література:

1. Бейко И.В. и др. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.
2. Дослідження операцій: Підручник, у 2-х томах. Том 1. – ТОВ «Юго-Восток, Лтд», 2015.
3. Зайченко Ю.П., Шумилов С.А. Исследование операций. Сб. задач. – К.: Вища школа, 1984.
4. Пономаренко Л.А. Основи економічної кібернетики. Підручник. – К.: Київ. нац. торг.-екон. ун-т, 2012.
5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. – М.: Изд-во БЕК, 2002.
6. Шарапов О.Д., Дербенцев В.Д., Семьонов Д.Є. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2014.

**Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо:** ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

## ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

### 1.1. Загальна форма задачі дослідження операцій

Задачі дослідження операцій це наведено приклади задач, лінійного про­грамування на знаходження максимуму або мінімуму цільової функції при системі обмежень, які в одних задачах мають форму нерівностей, в інших - форму рівнянь, а в деяких з них обмеження задаються як нерівностями, так і рівняннями. В розглянутих задачах невідомі змінні вважали зв'язаними умовою невід'ємності, що зумовлено реальною природою розглядуваних явищ. Це положення справедливе для більшості прикла­дних задач математичного програмування. Тому умову невід'ємності невідомих змінних часто називають природними обмеженнями задачі. Ці обмеження мають основне значення в теорії задач лінійного програму­ван­ня та побудові алгоритмів їх розв'язку, і тому їх завжди виділяють в окрему групу умов. Однак, інколи в реальних ситуаціях на змінні або не можна накладати обмеження по знаку або навіть слід прийняти умову недодатності деяких змінних.

Отже, щоб представити задачу лінійного програмування в най­більш загальній формі, з якої можна добути всі окремі випадки, слід відмо­витись від умови не­від'ємності всіх змінних задачі.

**Означення.** Загальною формою задачі лінійного програмування є задача на знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) лінійної цільової функції при лінійній системі обмежень, що включає як рівності, так і нерівності обох знаків, і при невідомих змінних, з яких одні зв'язані умовою невід'ємності, другі - умовою недодатності, а на знак третіх ніяких умов не накладено, тобто задача має такий вигляд:

 (2.30)

, (2.31)

;

,

. . . . . . . . . . . . . . . (2.32)

;

,

. . . . . . . . . . . . . . . (2.33)

;

 (2.34)

; (2.35)

. (2.36)[[1]](#footnote-1)

Назвемо групу обмежень (2.31) — (2.33) *основними обмеженнями,* а групу (2.34) — (2.36) *обмеженнями на знак*. Отже, загальна форма задачі є формою із змішаною системою обмежень на знаки невідомих.

Для вивчення методів розв’язку задачі лінійного програмування потрібно розглядати і матричну форму запису задачі:

**Z** = **CX**→max (min) (2.37)

при обмеженнях

 **AX** = **B**, (2.38)

 **X** ≥ 0.

Матриця **  називається *матрицею умов* задачі, матрицю ,де буква (*Т*) означає операцію транспону­вання, називається *вектором вільних членів* задачі (іноді *вектором обме­жень* задачі), матрицю  *– вектором невідомих* (змінних), матрицю  – *вектор коефіцієнтів лінійної форми*, колонки матриці умов задачі **А** називаються *векторами умов* задачі, матриця **А** разом з матрицею **B** утворюють матрицю загальних умов задачі:

. (2.39)

Ранг матриці загальних умов задачі назвемо *рангом системи обмежень.* Ранг матриці системи обмежень визначає кількість *базисних* *змінних* (залежних змінних), усі решта змінні вважаються *вільними (незалежних змінних)*. Розв’язок системи обмежень, у якому вільні змінні дорівнюють нулеві, називають *базисним планом*. Будь-який невід’ємний розв’язок системи обмежень задачі лінійного програмування називати­мемо *допустимим планом*. Допустимий базисний план *назвемо опорним.* План, що надає цільовій функції максимального значення будемо вва­жати *оптимальним*.

В теоретичному плані всі задачі математичного програмування можна розглядати тільки як задачі на мінімум чи тільки як задачі на максимум. Справді, кожну задачу на максимум можна звести до задачі на мінімум, змінивши знак лінійної форми, тобто змінивши знаки її коефі­цієнтів:

, (2.40)

бо . Так само задачі на мінімум можна звести до задач на максимум.

Система обмежень (2.31) – (2.36) може бути *сумісною* або *несумісною*. Сумісна система обмежень визначає в *n*-вимірному векторному просторі область визначеності задачі, інакше, область існування планів задачі лінійного програмування. Кожна точка області означеності є планом задачі, а сама область є множиною планів задачі лінійного програмуван­ня. В більшості задач область існування планів задачі обмежена, але трапляються випадки необмеженості множини планів. Це, як правило, зумовлює необмеженість зверху чи знизу лінійної форми задачі, що, звичайно, не відповідає дійсності і є результатом некоректної (неточної чи неправильної) постановки задачі, означаючи найчастіше відсутність якогось істотного обмеження. Формулювання задачі буде також некорек­тним, якщо система обмежень задачі несумісна, суперечлива; тоді множина планів задачі, очевидно, не містить жодного плану, буде порож­ньою.

Обмеження загальної задачі, задані у вигляді точ­них рівностей (2.31), називаються *жорсткими обмеженнями,* а задані у вигляді нерівностей – *нежорсткими обмеженнями.*

**ТЕМА 4. Графічний метод знаходження розв'язків задачі Дослідження операцій**

Деякі задачі лінійного програмування (ЗЛП) можна розв'язувати графічно. Використовують графічний метод розв'язування ЗЛП для обмеженого типу задач, а саме - з двома (трьома) змінними.

*Визначити найменше або найбільше значення функції*

*z = c*0*+c*1*x*1*+c*2*x*2→ max (min)(2.41)

*при таких обмеженнях:*

** (2.42)

🗹 Розв'язок знаходять у такій послідовності:

1) будують многокутник розв'язків, системи нерівностей (2.42), який є перетином півплощин, що описуються окремо кожною нерівністю цієї системи;

2) знаходять оптимальну точку, яка за основною властивістю задач ЛП розміщена у вершині многокутника розв'язків нерівностей (2.42). Для знаходження оптимальної точки використовують *вектор нормалі *, побудований за цільовою функцією. Він пер­пендикулярний до лінії рівня, яка задана рівнянням *c*0*+c*1*x*1*+c*2*x*2*=const*.

Нагадаємо, що лінією рівня функції *z=z*(*x*1*,x*2) називають пряму *z=z*(*x*1,*x*2) *= с* = *const*. Якщо *z* = *z*(*x*1, *х*2) - лінійна функція *x*1, *x*2 , то лінія рівня є пряма і для різних значень сталої *с* такі лінії є паралельні. Якщо *z*(*х*1,*x*2) = 0 – лінія на площині, то вектор  - перпендикуляр­ний до цієї лінії в кожній її точці.

При паралельному перенесенні лінії рівня у напрямку вектора нор­малі ***N*** значення цільової форми зростає. Знаходимо вершину многокут­ника, в якій досягається найбільше значення функції *z*. Для знаходження точки мінімуму лінії рівня потрібно переміщувати у напрямку, протилеж­ному до ***N***.

Лінії рівня, що проходять через оптимальні вершини многокутни­ків розв'язків, називають *опорними* (оптимальними).

За допомогою нормалі ***N*** на одному рисунку можна одночасно знайти точкі *min* і *mах*, тобто розв'язати одночасно дві задачі;

3.Обчислюють оптимальні значення. Для цього знаходять коорди­нати вершин *min* і *mах* як спільний розв'язок рівнянь відповідних гранич­них прямих, що перетинаються в оптимальних вершинах. Знайдені коор­динати підставляють у формулу (2.41) й обчислю­ють *zmin* і *zmax* .

*Приклад.*

*Знайти найбільше і найменше значення функції*

*z = -*10*+* 3*x*1*+*2*x*2 *при обмеженнях*



🗹 *Розв’язок.*

1.*Будуємо многокутник розв'язків,* який скадається з перетину чотирьох півплощин розв'язків. Проводимо на рис. 1 граничні прямі усіх чотирьох півплощин розв'язків. Граничні прямі півплощини розв’язків пройдуть через точки:

I. 2*x*1+3*x*2=18, - *A*1(0;6), *A*2(9;0)

II. 2*x*1+*x*2=10, - *B*1(0;10), *B*2(5;0)

III. *x*1=0,- пряма паралельна осі O*x*1;

IV. *x*2=0,- пряма паралельна осі O*x*2.

Рис.1.

Щоб визначити, з якого боку від граничної прямої лежить півпло­щина розв'язків, достатньо узяти будь-яку точку поза прямою І і підста­вити її координати у нерівність Якщо нерівність задовольняється,. то півплощина розв'язків розміщена з боку обраної точки, якщо ні - то з протилежного. За точку порівняння доцільно, якщо це можливо, брати початок системи координат. Так, розв'язки першої і другої півплощин розміщені з того ж боку, що й початок координат, а розв'язок третьої - з протилежного. Многокутник розв'язків на рис. 1. заштриховано.

2 *Знаходимо оптимальну точку.* Будуємо вектор нормалі, початок якого лежить у точці (0; 0), кінець – у точці (3;2). Пересуваючи лінію рівня ( -10+ 3*x*1+2*x*2=0) у напрямку *N*, знаходимо, що *zmin* досягається в точці 0, *zmax* - у точці *B2*.

3 *Обчислюємо оптимальні значення.* Точка *C* - точка перетину граничних прямих І і II:



Із рис.1 видно, що *x*1=4, *x*2=3, *C*(4;3);

*zmax= z*(*C*)= *-* 10+3•4+2•3=8.

Точка 0 є точкою перетину граничних прямих III і IV

 *x*1= 0, *x*2 = 0, *C*(0;0);

 *zmin=z*(0) = ***-***10+3•0+2•0 = *-*10.

Відповідь: *zmin = -*10, *zmax =* 8*.*

### Загальний висновок за темою лекції

1. Організувати сукупність дій, необхідних для поставки задачі: визначити змінні і константи, побудувати цільову функцію та систему обмежень
2. Систематизувати задачі за певними групами: розподіл ресурсів, розподіл матеріалів, транспортна задача.

**Питання і завдання студентам для контролю знань.**

1. Що таке ЗДО?
2. Які ви знаєте властивості ЗДО?
3. Що таке система обмежень?
4. Що таке цільова функція?
5. Що таке многокутник розв’язків?

**Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_**Мищишин О.Я. доцент, к. ф.-м.н., доцент

 (підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

1. Символ  означає, що на знак змінної обмеження не накладається. [↑](#footnote-ref-1)